TESIS DE MAESTRÍA

Discretización del Movimiento Browniano en el Plano Hiperbólico

Por: Vittorio Puricelli Bocianskas

Orientador: Pablo Lessa

Maestría en Matemática
PEDECIBA
Universidad de la República
Uruguay

Resumen

Dado un subgrupo discreto Γ de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ con cociente compacto, presentamos un método de discretización del Movimiento Browniano en el Plano Hiperbólico, mediante el cual se obtiene una probabilidad μ de soporte en Γ para la cual la medida visual es estacionaria. Obtenemos además que dicha probabilidad tiene momento exponencial finito.

Abstract

Given a dicrete subgroup Γ of $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ with compact quotient, we present a discretization procedure applied to Brownian Motion in Hyperbolic Plane, that allows to construct a probability measure μ supported in Γ for which the visual measure is stationary. We obtain also that this probability measure has finite exponential moment.

Índice

Introducción

En un artículo reciente ([LNP21, Teorema A.1]) se demuestra que dado un subgrupo discreto Γ de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ convexo-cocompacto, se puede construir una probabilidad μ con soporte Γ para la cual la medida de Patterson-Sullivan es estacionaria y que además dicha medida tiene momento exponencial finito. La existencia y primer momento finito en el caso convexo-cocompacto fue probada previamente en [CM07b].

La existencia de una tal medida μ fue probada en primera instancia por Furstenberg para el caso cocompacto ([Fur71]) mediante un método de discretización del Movimiento Browniano. En dicho artículo el autor obtiene primer momento finito. Motiva este trabajo la extención del método de discretización de Furstenberg al caso convexo-cocompacto para así reobtener el teorema de [LNP21].

En este trabajo se presenta el método de discretización del Movimiento Browniano en el plano hiperbólico para el caso cocompacto y se demuestra la existencia de la medida μ con momento exponencial finito.

En el capítulo primero presentamos algunas nociones básicas de geometría hiperbólica plana. Introducimos también la medida visual, y resultados básicos sobre funciones armónicas.

En el capítulo segundo introducimos a los grupos fuchsianos, junto con algunas de sus propiedades más elementales. Presentamos el Teorema del Polígono de Poincaré, con este mostramos como contruir un teselado del disco hiperbólico por polígonos de p lados a q por vértice. El grupo asociado a dicho teselado aparece más adelante en el ejemplo de Kosenko.

En el capítulo tercero vemos como a partir de una probabilidad en $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ se construye una caminata en $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ y relacionamos la medida estacionaria de la probabilidad con la medida de salida de la caminata. Probamos la convergencia al borde de dicha caminata bajo ciertas hipótesis poco restrictivas. Estos resultados no son esenciales para el objetivo del trabajo, pero ayudan a poner dicho objetivo en el contexto de una área matemática más grande. Por último se presenta el ejemplo de Kosenko, este es una caminata en un grupo fuchsiano cocompacto con medida estacionaria singular respecto de la medida visual.

En el capítulo cuarto se enuncia el teorema principal a probar en este trabajo (Teorema 4.1). También comentamos sobre consecuencias y generalizaciones.

En el capítulo quinto se introduce el Movimiento Browniano en el plano hiperbólico junto con algunas propiedades elementales y otras que serán de utilidad posteriormente para la prueba del Teorema 4.1, como por ejemplo, el momento exponencial del diámetro (Proposición 5.13).

En el capítulo sexto es el capítulo medular de este trabajo, en él se presenta el método de discretización del Movimiento Browniano, que resumimos en el Lema 6.1. El capítulo está dedicado a probar dicho lema.

En el capítulo sexto mostramos como finalizar la prueba del Teorema 4.1 con los resultados obtenidos hasta entonces.

Por último se incluye un apéndice con algunas pruebas y referencias sobre nociones y resultados probabilísticos que son utilizados a lo largo del trabajo.

Capítulo 1

Métrica hiperbólica

1.1. Definición y propiedades básicas

En esta sección presentaremos brevemente dos modelos de geometría hiperbólica, a saber, el *semiplano de Poincaré* y el *disco hiperbólico*. Veremos sus propiedades más importantes, y otras que nos servirán más adelante cuando trabajemos con el Movimiento Browniano Hiperbólico. Por referencias se pueden consultar [Kra04], [Kat92] y [Dal07].

1.1.1. Isometrías

Definición 1.1. El *disco hiperbólico* es $\mathbb{D}$ munido de la métrica riemanniana, que llamamos hiperbólica, o de Poincaré:

$$\frac{2}{1-|z|^2}\langle v, w\rangle, \quad \forall v, w \in \mathbb{C} = T_z\mathbb{D}.$$

Recordamos que mediante el lema de Schwarz-Pick, se determinan los automorfismos ($f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorfa y biyectiva), resulta

$$Aut(\mathbb{D}) = \left\{ e^{i\theta}\frac{\alpha - z}{1-\overline{\alpha}z} : \theta \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{D} \right\}.$$

La importancia de esto en lo que sigue es que los automorfismos son exactamente las isometrías que preservan orientación:

Proposición 1.2. $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{D}) = Aut(\mathbb{D})$.

Consideremos ahora $\mathbb{H} := \{x + iy \in \mathbb{C} : x \in \mathbb{R},\ y > 0\}$, el mapa $\Phi : \mathbb{H} \to \mathbb{D}$ dado por

$$\Phi(z) = \frac{i-z}{i+z},$$

es holomorfo y biyectivo. Podemos llevar la métrica de $\mathbb{D}$ a $\mathbb{H}$ mediante el pullback, para obtener:

Definición 1.3. El *semiplano de Poincaré* es $\mathbb{H} := \{x + iy \in \mathbb{C} : x \in \mathbb{R},\ y > 0\}$ munido con la métrica riemanniana

$$\frac{1}{\mathrm{Im}(z)^2}\langle v, w\rangle, \quad \forall v, w \in \mathbb{C} = T_z\mathbb{H}.$$

Además, conjugando por el mapa Φ obtenemos

Proposición 1.4. $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}) = \left\{ \dfrac{az+b}{cz+d} : a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1 \right\}.$

Consideremos ahora

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ tales que } ad - bc = 1 \right\}$$

El mapa $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longrightarrow \dfrac{az+b}{cz+d}$ es un morfismos de grupos, y su núcleo es $\{Id, -Id\}.\partial$
De esta manera se identifica $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H})$ con

$$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) = {}^{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})}\!\big/_{\{Id,-Id\}}.$$

Proposición 1.5. $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} b \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \lambda > 0 \right\rangle.$

En otras palabras, toda isometría de $\mathbb{H}$ resulta de componer una cantidad finita de veces isometrías positiva de la forma:

1. $z \to -\dfrac{1}{z}$,
2. $z \to \lambda z$ para $\lambda > 0$,
3. $z \to z + l$ para $l \in \mathbb{R}$.

El grupo $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ actúa naturalmente en $\mathbb{H}$ por isometrías mediante

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z = \frac{az+b}{cz+d},$$

esta acción es transitiva pero podemos precisar más.
El fibrado tangente unitario de $\mathbb{H}$ es

$$\mathrm{T}^1\mathbb{H} = \{(z, v) : z \in \mathbb{H}\ , v \in \mathbb{C} \text{ tal que } |v| = Im(z)\}.$$

Como $\left(\dfrac{az+b}{cz+d}\right)' = \dfrac{1}{(cz+d)^2}$, tenemos que $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ actúa en $\mathrm{T}^1\mathbb{H}$ por

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}(z, v) = \left(\frac{az+b}{cz+d}, \frac{1}{(cz+d)^2}\right).$$

El hecho notable de esta acción es que

Proposición 1.6. La acción de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ en $\mathrm{T}^1\mathbb{H}$ es transitiva y fiel, por tanto,

$$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \simeq \mathrm{T}^1\mathbb{H}.$$

Observación 1.7. El borde de $\mathbb{H}$ es $\partial\mathbb{H} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, y la acción de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ en $\mathbb{H}$ se extiende al borde naturalmente poniendo $-\dfrac{1}{\infty} = 0$ y $\infty = \lambda.\infty = \infty + l$ para todos $\lambda > 0$, $l \in \mathbb{R}$. Esta acción es por difeomorfismos y además es transitiva.

Proposición 1.8 (Clasificación de isometrías)**.**
Sea g una isometría de $\mathbb{H}$, pasa una y sólo una de las siguientes alternativas

1. g fija un punto de $\mathbb{H}$, decimos que g es elíptica.
2. g fija un punto de $\partial\mathbb{H}$, decimos que g es parabólica.
3. g fija dos puntos de $\partial\mathbb{H}$, decimos que g es hiperbólica.

1.1.2. Geodésicas

Definimos una distancia en $\mathbb{H}$ (o $\mathbb{D}$) a partir de la métrica hiperbólica, de manera usual.

Definición 1.9. Dados $z, w \in \mathbb{H}$ (o $\mathbb{D}$) podemos definir su distancia (hiperbólica) como

$$\mathrm{dist}_{\mathbb{H}}(z,w) = \inf\{l_{\mathbb{H}}(\gamma) : \gamma \text{ es una curva que une } z \text{ con } w\}, \tag{1.1.1}$$

donde

$$l_{\mathbb{H}}(\gamma) := \int_a^b \frac{||\gamma'(t)||}{Im(\gamma(t))} dt, \text{ es la longitud de la curva } \gamma : [a,b] \to \mathbb{H}.$$

Cuando no haya lugar a confusiones omitiremos el subíndice en $\mathrm{dist}_{\mathbb{H}}$ y $l_{\mathbb{H}}$.

Definición 1.10. Decimos que una curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{H}$ es una *geodésica* si:

- $||\gamma'(t)||_{\gamma(t)} = 1 \quad \forall t \in [a,b]$
- Dado $t \in [a,b)$ existe $\delta > 0$ tal que si $t < s \leq t+\delta$ se tiene: $\mathrm{dist}_{\mathbb{H}}(\gamma(t),\gamma(s)) = l_{\mathbb{H}}(\gamma|_{[t,s]}) = |t-s|$.

A partir de la definición se puede verificar que:

Proposición 1.11. La curva $\gamma : (-\infty,+\infty) \to \mathbb{H}$ tal que $\gamma(t) = ie^t$, es una geodésica de $\mathbb{H}$. Cumple $\gamma(0) = i$ y $\gamma'(t) = i$ y en particular

$$\mathrm{dist}_{\mathbb{H}}(i, ie^t) = |t| \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Usando que $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ actúa transitivamente en $\mathrm{T}^1\mathbb{H}$, y que conocemos explícitamente $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{D})$ se consigue

Proposición 1.12.

1. $\operatorname{dist}_{\mathbb{H}}(z,w) = \log\left(\frac{|z-w|}{2\sqrt{Im(z)Im(w)}} + \sqrt{\frac{|z-w|^2}{4Im(z)Im(w)} + 1}\right) \quad \forall z, w \in \mathbb{H}$

2. $\operatorname{dist}_{\mathbb{D}}(z,w) = \log\left(\frac{1+\frac{|z-w|}{|1-\bar{z}w|}}{1-\frac{|z-w|}{|1+\bar{z}w|}}\right) \quad \forall z, w \in \mathbb{D}.$

3. Para todo $z \in \mathbb{H}$ y $v \in \mathbb{C}$ con $|v| = Im(z)$, existe una única geodésica que pasa por z con velocidad v.

4. Para todos $z, w \in \mathbb{H}$ existe una única geodésica que une z con w.

5. Con la métrica de hiperbólica, $\mathbb{H}$ y $\mathbb{D}$ son geodésicamente completo.

6. $(\mathbb{H}, \operatorname{dist}_{\mathbb{H}})$ y $(\mathbb{D}, \operatorname{dist}_{\mathbb{H}})$ son espacios métricos completos[1], además la topología es la heredada de $\mathbb{R}^2$.

Un hecho importante sobre las isometrías hiperbólicas es que al ser transformaciones de Möbius, preservan la familia de círculos y rectas.

Proposición 1.13. Tanto las isometrías de $\mathbb{H}$ como las de $\mathbb{D}$, mandan rectas y círculos en rectas y círculos.

Obtenemos así una imagen clara de las geodésicas en estos espacios.

Corolario 1.14.

En $\mathbb{H}$ las geodésicas son las semirrectas y semicírculos perpendiculares a $\mathbb{R}$.

En $\mathbb{D}$ las geodésicas son los diámetros y semicírculos perpendiculares a S^1.

Algunas propiedades geométricas básicas, son las siguientes

Proposición 1.15.

1. Dada una geodésica γ y un punto $a \in \mathbb{D}$ existe una única geodésica que pasa por a y es perpendicular a γ.

2. Si $a, b, c \in \mathbb{D}$ satisfacen $d(a,c) = d(a,b) + d(b,c)$ entonces a, b y c están alineados, es decir, hay una geodésica que pasa por los tres puntos.

3. Dadas dos geodésicas que no se intersecan, existe una única geodésica que es perpendicular común y que realiza la distancia entre las geodésicas.

4. Si γ_1, γ_2 son geodésicas,
   - $d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = O(e^{-t})$ o de lo contrario,
   - $d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = O(e^{t})$

[1] Se puede lidiar directamente con la definiciones, o se puede aplicar Hopf-Rinow por el item anterior.

1.1.3. Perímetro, área y curvatura

Una cuenta muestra que $D_{\mathbb{D}}(0, r) = D(0, \tanh(r/2))$, de donde los discos con la métrica hiperbólica son también discos euclídeos, sin embargo, no es cierto que tengan el mismo centro.

Tenemos entonces que el perímetro (hiperbólico) de un disco (hiperbólico) de radio $r > 0$ está dado por

$$\operatorname{Per}(D_{\mathbb{D}}(z, r)) = \frac{4\pi \tanh(r/2)}{1 - \tanh(r/2)^2} = 2\pi \sinh(r).$$

Vemos entonces que para r chico, el perímetro hiperbólico se aproxima al euclídeo: $\operatorname{Per}(D_{\mathbb{D}}(z, r)) \simeq 2\pi r$.

Dado una región $U \subset \mathbb{D}$ definimos su área (hiperbólica) como

$$\text{Área}(U) = \int_U \frac{4dxdy}{(1 - (x^2 + y^2))^2}.$$

En particular obtenemos

$$\text{Área}(D_{\mathbb{D}}(o, r)) = \frac{4\pi(\tanh(r/2))^2}{1 - \tanh(r/2)^2} = 2\pi(\cosh(r) - 1). \tag{1.1.2}$$

Otra vez el área hiperbólica se aproxima a la euclídea para valores de r cercanos a cero: $\text{Área}(D_{\mathbb{D}}(o, r)) \simeq \pi r^2$.

Sin embargo, contrariamente al caso euclidiano

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{\operatorname{Per}(D_{\mathbb{D}}(o, r))}{\text{Área}(D_{\mathbb{D}}(o, r))} = 1.$$

Podemos escoger las siguientes coordenadas polares geodésicas en $\mathbb{D}$

$$(\rho, \theta) \to \tanh(\rho/2) e^{i\theta},$$

el pullback de la métrica hiperbólica por estas coordenadas es

$$d\rho^2 + \sinh^2(\rho) d\theta^2.$$

Recuperamos con esta métrica las fórmulas para el perímetro y el área vistas anteriormente. Pero además podemos decir algo acerca de la curvatura:

Proposición 1.16. La curvatura gaussiana de la métrica hiperbólica es $K = -1$.

Demostración. En coordenadas polares geodésicas, tenemos $E = 1$, $F = 0$ y $G = \sinh(\rho)^2$. Luego

$$K = -\frac{\partial_{\rho\rho}(\sqrt{G})}{\sqrt{G}} = -1.$$

□

1.1.4. Triángulos, polígonos y Gauss-Bonnet

Definición 1.17. Un polígono P en $\mathbb{D}$ es un convexo, cerrado tal que para todo $z \in \partial P$ existe un entorno U de manera que $U \cap \partial P$ es una unión finita de segmentos geodésicos. Notemos que admitimos de esta manera que la clausura de P en $\overline{\mathbb{D}}$ tenga intersección no vacía con $\partial \mathbb{D}$.

Un lado de un polígono P es un segmento geodésico maximal contenido en ∂P.

Un vértice es un punto en $z \in \overline{\mathbb{D}}$ tal que se tiene alguna de las siguientes

i) pertenece la intersección de dos lados.

ii) es punto límite común de dos lados (vértice ideal).

El ángulo del polígono en cada vértice se define como el ángulo que forman las geodésicas que determinan el vértice. Para vértices ideales el ángulo es cero.

A modo de contraste con el caso euclidiano, tenemos

Proposición 1.18.

1. Si $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ son los ángulos de un polígono de n lados
$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_i < (n-2)\pi.$$
2. No hay bígonos (polígono de 2 lados).
3. No hay cuadrados (polígonos de cuatro lados con ángulos rectos).
4. Dos geodésicas tienen una única geodésica ortogonal común.
5. Si dos triángulos tienen los mismos ángulos, existe una isometría que lleva un triángulo en otro.
6. (Gauss-Bonnet) Sea T un triángulo con ángulos $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$, entonces
$$\text{Área}(T) = \pi - \gamma - \alpha - \beta.$$
7. (Método de continuidad) Para todos $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ tal que $\alpha + \beta + \gamma < \pi/2$ existe un triángulo con ángulos α, β y γ.

Relacionado con el ítem 5, podemos determinar la longitud de los lados de un triángulo a partir de sus ángulos, mediante la siguiente

Teorema 1.19 (Ley del coseno hiperbólico)**.**
Sea T un triángulo con ángulos interiores α, β y γ. Si a es el lado opuesto a α tenemos

$$\cos(\alpha) = -\cos(\beta)\cos(\gamma) + \operatorname{sen}(\beta)\operatorname{sen}(\gamma)\cosh(a).$$

A partir de Gauss-Bonnet, deducimos una propiedad geométrica que es característica de la hiperbolicidad.

Teorema 1.20. (δ-hiperbolicidad)
Existe $\delta > 0$ tal que para cualquier triángulo, todo punto sobre alguno de sus lados está a distancia menor que δ de los otros dos lados.

Demostración. Si para cada $\delta > 0$ encontramos un triángulo T_δ y un punto p sobre uno de sus lados l, tal que el punto está a distancia mayor que δ de los otros dos lados, entonces el disco (en la métrica hiperbólica) centrado en p de radio δ tiene como diámetro a l y por tanto un semidisco está contenido en el triángulo. De esta manera

$$\text{Área}(T_\delta) \geq \pi(\cosh(\delta) - 1) \to +\infty,$$

lo que es absurdo pues por Gauss-Bonnet π es una cota uniforme para el área de todos los triángulos.

$\square$

1.2. Medida visual

En esta sección presentamos la medida visual de manera geométrica, más adelante veremos que ésta es la distribución límite del Movimiento Browniano Hiperbólico (Proposición 5.18).

Queremos entender lo siguiente: si nos paramos en un punto del disco $\mathbb{D}$ y miramos hacia el infinito, i.e., hacia el borde ¿siempre vemos lo mismo? si no, ¿cómo cambia lo que vemos con el punto?

Para entender esto podemos dividir el "horizonte" en sectores y deslizar pelotitas con velocidad constante en distintas direcciones. Registramos cada vez el sector al cual la pelotita se fue. En el límite obtenemos una probabilidad en el "horizonte".

En esta sección formalizaremos esto, la idea es asociarle a cada punto una probabilidad en S^1 (el borde del disco), que vamos a llamar *medida visual*. Continuando la intuición anterior, esta es la probabilidad de que una pelotita termine en cierta región del borde.

Para todo $p \in \mathbb{D}$ tenemos,

$$\mathrm{T}^1_p\mathbb{D} = \{v \in \mathbb{C} : |v| = 1 - |p|^2\} = D(0, 1 - |p|^2) \subset \mathbb{C},$$

luego $\mathrm{T}^1_p\mathbb{D}$ tiene una única probabilidad invariante por rotaciones:

$$m_p = \frac{1}{2\pi(1 - |p|^2)} m, \text{ donde } m \text{ denota la medida de Lebesgue en } D(0, 1 - |p|^2).$$

Definimos para cualquier geodésica $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{H}$, sus extremos como

$$\gamma_{\pm\infty} = \lim_{t \to \pm\infty} \gamma(t) \in S^1,$$

los extremos determinan la geodésica a menos del sentido.
Consideramos ahora $\varphi^p : \mathrm{T}^1_p\mathbb{D} \to S^1$ como:

$$\varphi^p(v) = \gamma_{+\infty}, \text{donde } \gamma \text{ es la única geodésica con } \gamma(0) = p, \text{ y } \gamma'(0) = v.$$

Definición 1.21. La medida visual en $p \in \mathbb{D}$ es $\theta_p = \varphi^p_* m_p$.

Para lo que sigue vale la pena hacer una observación previa.

Proposición 1.22.

1. $\theta_{g.p} = g_*\theta_p$
2. $\theta_{g.p} << \theta_p$, y además $\dfrac{d\theta_{g.p}}{d\theta_p}(\xi) = |g'(\xi)| \;\; \forall \xi \in S^1$
3. θ_0 es la medida de Lebesgue en S^1

Demostración.

1. Por definición $g.\phi^p(v) = \phi^p(d_p g(v))$, luego dado E es conjunto medible de S^1

$$\begin{aligned}(\varphi^p)^{-1}(g^{-1}.E) &= \{v \in \mathrm{T}^1_p\mathbb{D} : \varphi_p(v) \in g^{-1}.E\} = \\ &= \{v \in \mathrm{T}^1_p\mathbb{D} : g.\varphi_p(v) \in E\} = \\ &= \{v \in \mathrm{T}^1_p\mathbb{D} : \varphi_{gp}(d_p g(v)) \in E\} = \\ &= \{w \in \mathrm{T}^1_{g.p}\mathbb{D} : \varphi_{g.p}(w) \in E\} = (\varphi^{g.p})^{-1}(E).\end{aligned}$$

2. Que $\theta_{g.p} << \theta_p$ es una consecuencia del ítem anterior y de que g es un difeomorfismo. Para calcular la derivada, tomamos $f \in C(S^1)$ luego

$$\begin{aligned}\int_{S^1} f(\xi)d\theta_{g.p}(\xi) &= \int_{S^1} f(\xi)dg_*\theta_p(\xi) = \\ &= \int_{S^1} f \circ g^{-1}(\xi)d\theta_p(\xi) \\ &= \int_{S^1} \frac{f \circ g^{-1}(\xi)}{|(g^{-1})'((g \circ g^{-1})\xi)|}|(g^{-1})'(\xi)|d\theta_p \\ &= \int_{S^1} \frac{f(\xi)}{|(g^{-1})'(g\xi)|}d\theta_p(\xi) = \\ &= \int_{S^1} f(\xi)|g'(\xi)|d\theta_p(\xi).\end{aligned}$$

3. Aplicando el ítem 1 a las rotaciones, obtenemos que θ_0 es una probabilidad invariante por rotaciones, por tanto es la medida de Lebesgue en S^1.

□

Deducimos de la proposición que $\theta_p << \theta_q$ para todos $p, q \in \mathbb{D}$ y que además

$$\frac{d\theta_p}{d\theta_q}(\xi) = |g'(\xi)|, \text{ donde } g \in \mathrm{Isom}^+(\mathbb{D}) \text{ es tal que manda } q \text{ en } p.$$

Definición 1.23. (Núcleo de Poisson) Este es

$$P(z, \xi) := \frac{d\theta_z}{d\theta_0}(\xi) = \frac{1 - |z|^2}{|\xi - z|^2} \quad \forall z \in \mathbb{D},\ \xi \in S^1.$$

En efecto, tomando

$$g(w) = \frac{z - w}{1 - \overline{z}w} \in \mathrm{Isom}^+(\mathbb{D}),$$

tenemos que g manda 0 en z y $|g'(\xi)| = \frac{1-|z|^2}{|\xi - z|^2}$.

Observación 1.24.
Podemos trasladar todas estas definiciones a $\mathbb{H}$ por la isometría $z \to \dfrac{i - z}{i + z}$.

En la siguiente sección veremos la relevancia del núcleo de Poisson.

1.3. Armonicidad y Laplaciano

Introducimos la idea de armonicidad y del Laplaciano en regiones del plano, junto con algunas propiedades básicas que en la próxima sección nos permitirán probar la Desigualdad de Harnack (Teorema 1.31), pieza clave para el método de discretización. Se puede consultar por ejemplo el libro de Ahlfors [Ahl79] por pruebas y otras referencias.

Sea V una región (i.e. abierto conexo) del plano $\mathbb{C}$, y $u : V \to \mathbb{R}$ de clase C^2.

Definición 1.25. El *Laplaciano* de u es:

$$\Delta u := \mathrm{div}(\nabla u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Un teorema fundamental es el siguiente

Teorema 1.26. Sea $u : V \to \mathbb{R}$, son equivalentes

1. u es de clase C^2 y $\Delta u = 0$
2. u es localmente parte real de una función holomorfa.
3. u es continua y para todo $z \in V$, si $r > 0$ es tal que $\overline{D(z, r)} \subset V$ tenemos

$$u(z) = \int_{S^1} u(z + r\xi) d\xi.$$

Definición 1.27. Decimos que u es *armónica* si se satisface cualquiera de estas condiciones.

Observación 1.28 (Invariancia conforme).
Se deduce del segundo ítem que para cualquier $f : U \to V$ holomorfa y $u : V \to \mathbb{R}$ armónica, $v = u \circ f$ es armónica en U.

El ejemplo más importante de función armónica en $\mathbb{D}$ es

Proposición 1.29. El Núcleo de Poisson es una función armónica en $\mathbb{D}$, esto es: fijado $\xi \in S^1$, el mapa $z \to P(z, \xi)$ es una función armónica.

Pues no sólo es armónica si no que permite representar otras funciones armónicas.

Teorema 1.30 (Problema de Dirichlet).
Sea $f : S^1 \to \mathbb{R}$ continua cualquiera, existe una única función armónica u en $\mathbb{D}$ que se extiende continuamente a S^1 como $u(\xi) = f(\xi)$ para todo $\xi \in S^1$. De hecho:

$$u(z) = \int_{S^1} P(z, \xi) f(\xi) d\xi.$$

1.4. Desigualdad de Harnack

En esta sección probamos el siguiente teorema, fundamental para el método de discretización (ver Lema 6.1) que a su vez es esencialmente la prueba del Teorema 4.1.

Teorema 1.31 (Desigualdad de Harnack).
Dado $K \subset \mathbb{D}$ compacto existe $C > 0$ tal que para toda $u : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ armónica positiva,

$$\frac{1}{C} u(w) \leq u(z) \leq C u(w) \quad \text{para todos } z, w \in K.$$

La idea es acotar la norma del gradiente para funciones armónicas. Hacemos esto progresivamente:

Lema 1.32. Si $h_\xi(z) = P(z, \xi)$ tenemos $||\nabla h(0)|| = 2$.

Demostración. Tomemos la isometría $\varphi : \mathbb{H} \to \mathbb{D}$ dada por $\varphi(w) = \frac{i-w}{i+w}$. Se obtiene $h_1(\varphi(x + iy)) = 2y$. Por tanto

$$2 = ||\nabla(h_1 \circ \varphi)(i)|| = ||\nabla h_1(\varphi(i))\varphi'(i)|| = || - \nabla h_1(0)|| = ||\nabla h_1(0)||.$$

Como $h_\xi(z) = h_1(\xi^{-1} z)$, tenemos

$$||\nabla h_\xi(0)|| = ||\nabla h_1(\xi^{-1} 0)\xi^{-1}|| = ||\nabla h_1(0)|| = 2.$$

□

Lema 1.33. Si u es armónica y positiva en $\mathbb{D}$ tenemos

$$||\nabla(\log u)(z)|| \leq \frac{2}{1-|z|^2} \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}.$$

Demostración. Basta probar

$$||\nabla(\log u)(0)|| \leq 2, \text{ para toda } u \text{ armónica y positiva en } \mathbb{D}. \tag{1.4.1}$$

Pues luego si $\varphi \in \text{Isom}^+(\mathbb{D})$ manda 0 en z obtenemos: $u \circ \varphi$ armónica positiva y

$$2 \geq ||\nabla(\log u \circ \varphi)(0)|| = ||\nabla(\log u)(z)\varphi'(0)|| = ||\nabla(\log u)(z)||\ |\varphi'(0)|,$$

como $|\varphi'(0)| = 1 - |z|^2$, queda probado.
Para probar (1.4.1), fijemos u armónica y positiva en $\mathbb{D}$. Dado $0 < \lambda < 1$ consideremos $u_\lambda(z) = u(\lambda z)$, luego u_λ se extiende continuamente al borde y

$$||\nabla(\log u_\lambda)(0)|| = \lambda||\nabla(\log u)(0)|| \quad \text{para todo } 0 < \lambda < 1.$$

Es decir, alcanza con probar (1.4.1) en el caso que la función se extienda continuamente al borde. Pero si u se extiende continuamente al borde, por el Teorema 1.30

$$u(z) = \int_{S^1} P(z,\xi)u(\xi)d\xi.$$

Para z en un entorno de 0 y $\xi \in S^1$, la función $(z,\xi) \to P(z,\xi)$ es C^∞, luego

$$\frac{\partial u(0)}{\partial w} = \int_{S^1} \frac{\partial P(0,\xi)}{\partial w} u(\xi)d\xi,$$

de donde

$$||\nabla u(0)|| \leq 2\int_{S^1} u(\xi)d\xi = 2u(0),$$

pues u es positiva y $u(0) = \int_{S^1} u(\xi)d\xi$.
Como $\nabla(\log u)(0) = \frac{\nabla u(0)}{u(0)}$ queda probado el lema. □

Este lema se traduce a una cota uniforme del gradiente en la métrica hiperbólica. Efectivamente, si u es cualquier función de clase C^1 el gradiente en esta métrica es el único vector $\nabla_{\mathbb{D}} u(z) \in T_z\mathbb{D}$ tal que

$$d_z u(v) = \langle v, \nabla_{\mathbb{D}} u(z)\rangle_z, \text{ para todo } v \in T_z\mathbb{D},$$

por definición de la métrica en $\mathbb{D}$ tiene que ser

$$\nabla_{\mathbb{D}} u(z) = \left(\frac{1-|z|^2}{2}\right)^2 \nabla u(z).$$

Por tanto

Corolario 1.34. Para toda función armónica positiva u en $\mathbb{D}$ tenemos

$$||\nabla_{\mathbb{D}}(\log u)(z)||_z \leq 1.$$

Ahora sí podemos finalizar la prueba de la desigualdad de Harnack

Demostración del Teorema 1.31. Sea K un compacto cualquiera, dados $z, w \in K$ tomamos γ la geodésica que une z con w, luego

$$|\log u(z) - \log u(w)| = |\int \langle \nabla(\log u)(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle_{\gamma(t)} dt| \leq \operatorname{diam}(K),$$

por tanto

$$\exp(-\operatorname{diam}(K))u(w) \leq u(z) \leq \exp(\operatorname{diam}(K))u(w).$$

$\square$

Capítulo 2

Grupos fuchsianos

2.1. Definición, ejemplos y propiedades básicas

En esta sección presentamos a los grupos fuchsianos, el teorema principal de este trabajo (Teorema 4.1) es un resultado acerca de la regularidad de cierta probabilidad asociada a un grupo fuchsiano. Referencias para esta sección son [Kat92] y [Dal07].

El grupo $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ hereda una topología natural de $M_2(\mathbb{R})$.

Definición 2.1 (Grupo fuchsiano)**.**
Un grupo se dice *fuchsiano* si es un subgrupo discreto de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$.

Claramente todo subgrupo de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ actúa en $\mathbb{D}$ por isometrías.

Proposición 2.2. Sea Γ subgrupo de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, son equivalentes

1. Γ es fuchsiano.
2. Para todo $K \subset \mathbb{D}$ compacto y $z \in \mathbb{D}$ se tiene $\#\{g \in \Gamma : g.z \in K\} < +\infty$.

Observación 2.3. Cuando Γ grupo fuchsiano no contiene elementos elípticos, la acción de Γ en $\mathbb{D}$ es propiamente discontinua, esto es, para todo $z \in \mathbb{D}$ existe $U \subset \mathbb{D}$ entorno abierto de z tal que $g.U \cap U \neq \emptyset \implies g = id$.

En este caso el cociente ${}^{\mathbb{D}}\!/_{\Gamma}$ resulta una superficie. Mientra que en general el cociente ${}^{\mathbb{D}}\!/_{\Gamma}$ tiene estructura de superficie salvo en algunos puntos.

Definición 2.4 (Grupo fuchsiano cocompacto)**.**
Decimos que un grupo fuchsiano es cocompacto si el cociente ${}^{\mathbb{D}}\!/_{\Gamma}$ es compacto.

Definición 2.5 (Grupos fuchsianos elementales)**.**
Un grupo fuchsiano Γ se dice elemental si existe $z \in \overline{\mathbb{D}}$ fijo por todo elemento de Γ. No es difícil ver que hay tres tipos de grupos fuchsianos elementales (no triviales),

1. $\Gamma = g\langle r_\theta \rangle g^{-1}$ con r_θ rotación de ángulo racional.

2. $\Gamma = \langle \gamma \rangle$ con γ parabólica.

3. $\Gamma = \langle \gamma \rangle$ con γ hiperbólica.

Ejemplo 2.6 (Grupos de Schottky)**.**
Toda geodésica divide a $\mathbb{D}$ en dos componentes que llamamos semiespacios. Dado $o \in \mathbb{D}$ y $g \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ hiperbólica, definimos $D(g,o)$ al semiespacio determinado por la mediatriz de o y $g.o$ que contiene a $g.o$.

Consideremos $g_1, g_2 \in G$ dos isometrías hiperbólicas. Supongamos que los ejes de traslación respectivos se cortan en un punto $o \in \mathbb{D}$. Definimos $D_i = D(g_i, o)$ y $D_i^{-1} = D(g_i^{-1}, o))$ para $i = 1, 2$. Obtenemos

$$g_i(D_i^{-1}) = \mathbb{D} \setminus D_i \text{ y } \ g_i(\mathbb{D} \setminus D_i^{-1}) = D_i, \text{ para } i = 1, 2.$$

Ejemplo 2.7 (Grupo modular)**.**
Consideremos

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z},\ ad - bc = 1 \right\},$$

luego, pasando al cociente, obtenemos $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ que es claramente fuchsiano.

1. $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z}) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$

2. El elemento $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ es elíptico (fija i) y por tanto la acción de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ no es propiamente discontinua.

3. Un dominio fundamental para la acción de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ está dado por

$$D = \{z \in \mathbb{H} :\ |z| \geq 1, |Re(z)| \leq 1/2\}.$$

Ejemplo 2.8 (Caminatas de ángulo recto)**.**

Sean $A_r = \begin{pmatrix} e^{r/2} & 0 \\ 0 & e^{-r/2} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, se considera el grupo $G_r = \langle A_r, B \rangle$, este codifica los posibles recorridos para una caminata dando pasos de largo r y doblando (o no) con ángulo recto.

¿Para cuáles valores de $r > 0$ este grupo es discreto? resulta que existe un valor r_∞ tal que si $r \geq r_\infty$ entonces el grupo es discreto. Sin embargo hay un conjunto discreto de $r < r_\infty$ para los cuales también G_r es discreto. Por una descripción completa del problema, demostraciones y más referencias, ver [GL20].

Definición 2.9 (Conjunto límite)**.**
El conjunto límite de un grupo fuchsiano Γ es

$$\Lambda(\Gamma) = \overline{\{\gamma.z : \gamma \in \Gamma\}} \subset S^1, \text{ donde } z \in \mathbb{D} \text{ es cualquiera.}$$

Proposición 2.10. Si Γ es un grupo fuchsiano cocompacto, entonces $\Lambda(\Gamma) = S^1$.

Proposición 2.11 (Polígono de Dirichlet)**.** Sea Γ grupo Fuchsiano, dado $z \in \mathbb{D}$ definimos polígono de Dirichlet asociado a z como

$$P_z = \{w \in \mathbb{D} : d(z, w) \leq d(gz, w) \ \ \forall g \in \Gamma\}$$

Tenemos entonces que si $Stab(z) = \{id\}$, P_z es un *polígono fundamental*, i.e., un polígono y un dominio fundamental.

2.2. Teorema del polígono de Poincaré

En esta sección presentamos el Teorema del polígono de Poincaré, este teorema permite, dado un polígono construir un grupo fuchsiano que tiene a éste como dominio fundamental para la acción de dicho grupo en $\mathbb{H}$.

De particular importancia es que utilizando este teorema en la próxima sección (sección 2.2) construiremos un grupo fuchsiano en el cual más adelante veremos un ejemplo de caminata para la cual la medida de salida es singular respecto de la medida de Lebesgue (sección 3.10). Referencias para esta sección son [Mas71] y [Bon09].

Comencemos fijando un polígono $P \subset \mathbb{H}$, para simplificar la exposición supondremos que el polígono es compacto. Llamamos por S al conjunto de lados de P, como el polígono es compacto, S es finito.

Definición 2.12. Una identificación en P es $\sigma : S \to S$ y $\{g_s\}_{s \in S}$ tal que

1. $g_s(s) = \sigma(s)$
2. $\sigma^2 = id_S$
3. $g_{\sigma(s)} = g_s^{-1}$
4. $\sigma(s) = s$ implica que g_s es la identidad en s.
5. Todo lado s tiene un entorno V tal que $g_s(V \cap P) \cap P^\circ = \emptyset$.

Observación 2.13. Observemos que permitimos $\sigma(s) = s$ en cuyo caso, por 4 y 5, g_s tiene que ser la reflexión respecto de la geodésica determinada por s. En particular $g_s^2 = id$.

Dado un vértice z_1 de P aplicamos el siguiente procedimiento:

1. Elegimos s_1 uno de los dos lados de P determinado por z_1, llamamos $g_1 = g_{s_1}$.
2. Tomemos $C = (z_1)$, $L = ((s_1, \sigma(s_1))$ y $T = (g_1)$.
3. Llamamos $z_2 = g_1(z_1)$, y tomamos s_2 lado determinado por z_2 distinto de $\sigma(s_1)$, consideramos $g_2 = g_{s_2}$.
4. Actualizamos: $C = (z_1, z_2)$, $L = ((s_1, \sigma(s_1)), (s_2, \sigma(s_2)))$ y $T = (g_1, g_2)$.

5. Aplicamos 3, cambiando z_1, s_1 y g_1 por z_2, s_2 y g_2.

6. Continuamos el procedimiento indefinidamente.

Después de este proceso obtenemos tres sucesiones

- $(z_1, \dots, z_n, \dots)$
- $((s_1, \sigma(s_1)), \dots, (s_n, \sigma(s_n)), \dots)$
- $(g_1, \dots, g_n, \dots)$

Como el polígono es compacto, las tres sucesiones son periódicas. Sin embargo el período no tiene porqué coincidir.

Definición 2.14. Consideramos m el mínimo período común a las tres sucesiones construidas a partir del procedimiento anterior, definimos el ciclo determinado por z_1 como $C(z_1) = (z_1, \dots, z_m)$. Si $\alpha(z_i)$ denota el ángulo interior al polígono en el vértice z_i, definimos el ángulo del ciclo como

$$\alpha(C(z_1)) = \sum_{i=1}^{m} \alpha(z_i)$$

Teorema 2.15 (Teorema del polígono)**.** Sea P un polígono compacto con una identificación, de manera que para cada vértice de P el ángulo del ciclo determinado por el vértice es $2\pi/n$, donde $n \geq 1$ (que depende a priori del vértice). Entonces el grupo generado por la identificación es discreto y P es un dominio fundamental para la acción de dicho grupo en $\mathbb{H}$.

Demostración. Para la prueba ver el artículo [Mas71], también el Teorema 6.1 de [Bon09] (en particular ver la sección 6.3.4) □

Teselado por p-ágonos a q por vértice

Como aplicación del teorema del polígono de Poincaré (Teorema 2.15) vamos a construir un teselado de $\mathbb{D}$ por polígonos de p lados a q por vértice. Este teselado corresponde a un grupo fuchsiano en el cual más adelante daremos un ejemplo de caminata al azar que tiene medida de salida singular respecto de Lebesgue.

El primer paso es teselar el disco por triángulos.

Proposición 2.16.
Si $1/p + 1/q < 1/2$ existe un teselado de $\mathbb{D}$ por triángulos con ángulos $\pi/p, \pi/q$ y $\pi/2$.

Demostración. Tenemos $\pi/p+\pi/q+\pi/2 < \pi$, entonces por el método de continuidad (Proposición 1.18, ítem 7) existe T triángulo de ángulos $\pi/p, \pi/q$ y $\pi/2$.

Identificamos cada lado consigo mismo, luego con la notación de la sección previa, tenemos: $\sigma(s_i) = s_i$ para $i = 1, 2, 3$, y g_{s_i} resulta la reflexión respecto de s_i. Para probar el corolario basta ver que estamos dentro de las hipótesis del Teorema del polígono de Poincaré (Teorema 2.15).

Tomemos z_1 el vértice con ángulo π/p. Aplicamos el procedimiento anterior en este punto y obtenemos las sucesiones

- $(z_1, z_1, \dots)$
- $((s_1, s_1), (s_2, s_2), (s_1, s_1), \dots)$
- $(g_{s_1}, g_{s_2}, g_{s_1}, g_{s_2}, \dots)$

Luego el período a considerar es $m = 2$ y el ángulo entonces es $2\pi/p$.

Haciendo un argumento análogo con los otros vértices verificamos que estamos dentro de las hipótesis del Teorema 2.15. Concluimos que el grupo generado por $\{g_{s_1}, g_{s_2}, g_{s_3}\}$ es discreto y que el triángulo T es fundamental para la acción de dicho grupo. Se obtiene así el teselado buscado.

$\square$

Proposición 2.17.
Si ${}^1\!/_p + {}^1\!/_q < {}^1\!/_2$ existe un teselado de $\mathbb{D}$ por polígonos de p lados a q por vértice.

Demostración. Rotamos con ángulo $2\pi/p$ este triángulo en el vértice con mismo ángulo. Obtenemos así un polígono regular de p lados con ángulos interiores π/q. Si Γ es el grupo fuchsiano dado por la proposición anterior el subgrupo generado por las reflexiones de los lados del polígono es un grupo fuchsiano con dominio fundamental dado por el polígono. $\square$

Capítulo 3

Caminatas al azar en PSL$(2,\mathbb{R})$

Consideremos μ una probabilidad en PSL$(2,\mathbb{R})$, vamos a suponer en este capítulo que el soporte de μ genera un grupo fuchsiano, aunque varios de los resultados a continuación son generalizables, este es el caso de mayor relevancia para este trabajo.

A continuación vemos cómo construir una caminata al azar a partir de μ.

Definición 3.1. Dada μ como antes, tomemos $(\gamma_n)_n$ i.i.d con distribución μ, y una probabilidad ν_0 en $\overline{\mathbb{D}}$. La caminata al azar inducida por μ con distribución inicial ν_0 es:

$$(z_n)_n \text{ tal que } z_0 \sim \nu_0, \text{ y } z_{n+1} = \gamma_{n+1} z_n$$

Explícitamente la distribución ν_{n+1} de z_{n+1} es

$$\begin{aligned}\nu_{n+1}(A) &= \mathbb{P}(z_{n+1} \in A) = \\ &= \sum_{\gamma} \mathbb{P}(z_n = \gamma^{-1}A)\mu(\gamma) = \\ &= \sum_{\gamma} \gamma_* \nu_n(A)\mu(\gamma) = \mu * \nu_n(z).\end{aligned}$$

3.1. Convergencia al borde

Nos interesa entender el comportamiento asintótico de la caminata. La cuestión más elemental es saber si existe c.s. $z_\infty = \lim_n z_n$. A esto nos dedicamos en toda la sección, concretamente probaremos el siguiente teorema:

Teorema 3.2. Sea μ una probabilidad en PSL$(2,\mathbb{R})$, consideremos $(\gamma_n)_n$ i.i.d con distribución μ. Si el soporte de μ no está contenido en un subgrupo elemental, existe una v.a. z_∞ en $S^1 = \partial\mathbb{D}$ tal que

$$z_n = \gamma_1 \dots \gamma_n . o \xrightarrow{n\to+\infty} z_\infty \text{ c.s. para todo } o \in \mathbb{D}.$$

Observación 3.3. Por definición es claro que la distribución de z_∞ está soportada en el conjunto límite $\Delta(\Gamma)$ (ver Definición 2.9).

A modo de introducir la estrategia para prueba del teorema, hacemos la siguiente observación

Observación 3.4. Supongamos por un momento que existe z_∞, llamemos ν a su distribución. Claramente,

$$z_n^k = z_{n+k} \;\text{ cumple } z_\infty = z_\infty^k = \lim_n z_n^k \;\text{ para todo } k \geq 0.$$

Luego para cualquier boreleano $A \subset \overline{\mathbb{D}}$, y $\gamma \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
\gamma_*\nu(A) = \nu(\gamma^{-1}A) &= \mathbb{P}(z_\infty \in \gamma^{-1}A) = \\
&= \mathbb{P}(z_\infty^k \in \gamma^{-1}A) = \\
&= \mathbb{P}(z_\infty^{k-1} \in A \mid \gamma_{k-1} = \gamma) = \\
&= \mathbb{P}(z_\infty \in A \mid \gamma_1 = \gamma),
\end{aligned}$$

y esto muestra que $\nu = \mu * \nu$.

Definición 3.5. Una probabilidad ν en $\overline{\mathbb{D}}$ es μ-estacionaria si $\nu * \mu = \nu$.

La observación anterior muestra que es necesaria la existencia de medidas estacionarias para que exista $z_\infty = \lim_n z_n$. La estrategia para probar el Teorema 3.2 consiste en

1. Probar que existe una medida estacionaria ν (Teorema 3.8),
2. Ver que c.s. existe una medida ν_ω tal que $(\gamma_1(\omega)\dots\gamma_n(\omega))_*\nu \to \nu_\omega$ (Teorema 3.9),
3. Por último concluir que c.s. $\nu_\omega = \delta_{z(\omega)}$ y concluir que $\lim_n z_n = z$ c.s. (final de la sección).

Ejemplo 3.6. Tomemos $\Gamma = \langle\gamma\rangle$ donde γ es hiperbólica que fija $-1, 1 \in S^1$ (por tanto, Γ es elemental), y consideremos la probabilidad $\mu = \frac{1}{2}\delta_\gamma + \frac{1}{2}\delta_{\gamma^{-1}}$, el soporte de μ entonces genera Γ grupo fuchsiano elemental.

Se verifica que $\nu = \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-1}$ es μ-estacionaria, de hecho es invariante. Luego $\nu(\omega) = \nu$, el ítem 3 en la estrategia anterior falla. De hecho la caminata inducida es exactamente la caminata simple $\mathbb{Z}$ que es recurrente, esto es, no existe z_∞.

Contrariamente a este ejemplo, resulta que bajo las hipótesis del Teorema 3.2, si ν es una medida estacionaria, esta no puede tener átomos. Este hecho jugará un rol importante más adelante en la prueba del Teorema 3.2.

Proposición 3.7. Sea μ una probabilidad en PSL$(2, \mathbb{R})$ tal que su soporte genera un subgrupo fuchsiano no elemental. Si ν es una medida μ-estacionaria, entonces ν no tiene átomos.

Demostración. Por absurdo supongamos que ν tiene algún átomo. Llamemos por $A(\mu)$ al conjunto de átomos de μ. Necesariamente

$$\text{existe } M = \max\{\mu(a) : a \in A(\mu)\} > 0,$$

pues o bien $A(\mu)$ es finito, o bien numerable pero para todo $\varepsilon > 0$ sólo hay finitos átomos con masa mayor que ε ya que μ es una probabilidad.

Tomemos $a \in A(\mu)$ tal que $\mu(a) = M$. Como ν es estacionaria,

$$\begin{aligned} M = \nu(a) = \mu * \nu(a) &= \sum_{\gamma} \gamma_* \nu(a)\mu(\gamma) = \\ &= \sum_{\gamma} \nu(\gamma^{-1}a)\mu(\gamma) \leq M. \end{aligned}$$

La última desigualdad es entonces una igualdad, lo que implica que

$$\nu(\gamma^{-1}a) = M \quad \text{para toda } \gamma \in \text{sop}(\mu).$$

Es decir que la órbita de a por sop(μ) está constituida de átomos con masa máxima, por lo que es finita. Luego el subgrupo generado por sop(μ) fija un conjunto finito de puntos, lo que implica que es elemental. $\square$

Empezamos lidiando con la existencia de medidas estacionarias.

Existencia de medidas estacionarias

Fijemos en esta sección la notación $G = \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ y $X = \overline{\mathbb{D}}$.

Teorema 3.8. Toda μ probabilidad en G admite una medida μ-estacionaria en X.

Demostración. Consideremos $(z_n)_n$ una caminata al azar inducida por μ (ver definición 3.1). Definimos $m_n = \dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \delta_{z_k}$.

Como X es compacto, $(m_n)_n$ tiene subsucesiones convergentes en la topología w^*. La idea es ver que todo punto de acumulación de esta sucesión es una medida estacionaria.

Para esto, consideramos el operador de Markov asociado a μ:

$$P_\mu : C(X) \to C(X), \text{ tal que } P_\mu(f)(z) = \int_G f(gz)d\mu(g).$$

Consideramos también $(\mathcal{F}_n)_n$ la filtración natural inducida por la caminata $(z_n)_n$. El punto es el siguiente, fijemos $f \in C(X)$

$$\begin{aligned}(\mu * m_n - m_n)(f) &= \left(\int_G (g_* m_n)(f) d\mu(g)\right) - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f(z_k) = \\ &= \left(\int_G \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f(gz_k) d\mu(g)\right) - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f(z_k) = \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \left(P_\mu(f)(z_k) - f(z_k)\right).\end{aligned}$$

Llamemos $U_k = P_\mu(f)(z_k) - f(z_k)$, y consideremos $M_n = \sum_{k=0}^{n} U_k$. Probaremos que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{M_n}{n} = 0, \text{ casi seguramente.}$$

Para esto usamos el teorema A.10. Notemos que:

- $\star$ $\mathbb{E}(|U_k|) \leq 2||f||_\infty < +\infty$, pues X es compacto.

$$\begin{aligned}\star\ \mathbb{E}(P_\mu(f)(z_{k+1}) \mid \mathcal{F}_k) &= \mathbb{E}\left(\int_G f(gz_k) d\mu(g)\right) = \\ &= \int_G \mathbb{E}(f(gz_k) \mid \mathcal{F}_k) d\mu(g) = \\ &= \int_G f(gz_k) d\mu(g) = P_\mu(f)(z_k),\end{aligned}$$

Por tanto $(M_n)_n$ es una martingala (ver ejemplo A.7).

$$\star\ \mathbb{E}(M_n^2) = \mathbb{E}\left(\left(\sum_{k=0}^{n} U_k\right)^2\right) \leq n\mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{n} U_k^2\right) \leq 3n^2||f||_\infty,$$

Luego $M_n \in L^2(\Omega, \mathbb{P})$ para cada $n \geq 0$. Por último tenemos

$$\star\ \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k^2}\mathbb{E}((\Delta_n M)^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k^2}\mathbb{E}(U_k^2) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k^2} 2||f||_\infty < +\infty,$$

entonces podemos aplicar el teorema A.10 para concluir

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{M_n}{n} = 0, \text{ casi seguramente.}$$

En términos de m_n esto es

$$(\mu * m_n - m_n)(f) \to 0 \text{ casi seguramente.}$$

Como $C(X)$ es separable, esto implica que

$$\mu * m_n - m_n \xrightarrow{w^*} 0 \text{ casi seguramente.}$$

Por lo que cada punto de acumulación ν de $(m_n)_n$, satisface $\mu * \nu = \nu$.

□

Convergencia de $(\gamma_1 \dots \gamma_n)_*\nu$

Resumimos el resultado a probar en el siguiente teorema. Para la prueba nos basamos en [BL85] (ver Lema 2.1 capítulo II). Recordemos que $G = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ y $X = \overline{\mathbb{D}}$.

Teorema 3.9. Sea μ una probabilidad en G, y ν una medida μ-estacionaria en X. Entonces ω-c.s. existe ν_ω probabilidad en X tal que

$$(\gamma_1(\omega)\dots\gamma_n(\omega))_*\nu \xrightarrow{n\to+\infty} \nu_\omega, \text{ y además}$$

$$(\gamma_1(\omega)\dots\gamma_n(\omega)\gamma)_*\nu \xrightarrow{n\to+\infty} \nu_\omega, \text{ para } \mu\text{-ctp } \gamma.$$

Demostración. Llamemos $g_n = \gamma_1\dots\gamma_n$, y fijemos $f \in C(X)$. Definimos

$$F(g) = \int_X f(g\xi)d\nu(\xi) = \int_X f(\eta)d(g_*\nu)(\eta) \text{ para todo } g \in G.$$

Probaremos primero entonces que $(F(g_n))_n$ converge c.s. De hecho, $(F(g_n))_n$ es una martingala acotada, en efecto consideremos $\mathcal{F}_n = \sigma(g_1,\dots,g_n)$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(F(g_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n) &= \int_G F(g_n g)d\mu(g) = \\
&= \int_G \left(\int_X f(g_n g\xi)d\nu(\xi)\right) d\mu(g) = \\
&= \int_X f(g_n\xi)d(\mu*\nu)(\xi) = \\
&= \int_X f(g_n\xi)d\nu(\xi) = \\
&= F(g_n).
\end{aligned}$$

Entonces por el teorema de convergencia de martingalas existe $\widehat{F}$ tal que

$$F(g_n) \xrightarrow{n\to+\infty} \widehat{F} \text{ c.s. y } \mathbb{E}(\widehat{F}) = \int_X f d\nu.$$

Para obtener

$$F(g_n\gamma) \xrightarrow{n\to+\infty} \widehat{F}, \text{ para } \gamma\ \mu\text{-c.s.} \tag{3.1.1}$$

probamos que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |F(g_k\gamma) - F(g_k)|^2 < +\infty \quad \mu\text{-c.s.} \tag{3.1.2}$$

en efecto calculamos

$$\mathbb{E}\left(\int_G \sum_{k=1}^{+\infty} |F(g_k\gamma) - F(g_k)|^2 d\mu(\gamma)\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \int_G \mathbb{E}\left(|F(g_k\gamma) - F(g_k)|^2\right) d\mu(\gamma) =$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{E}\left(|F(g_{k+1}) - F(g_k)|^2\right),$$

Pero

$$\mathbb{E}\left(|F(g_{k+1}) - F(g_k)|^2\right) =$$

$$= \mathbb{E}\left(F(g_{k+1})^2\right) + \mathbb{E}\left(F(g_k)^2\right) - 2\mathbb{E}\left(F(g_{k+1})F(g_k)\right) =$$

$$= \mathbb{E}\left(F(g_{k+1})^2\right) + \mathbb{E}\left(F(g_k)^2\right) - 2\mathbb{E}\left(F(g_k)\mathbb{E}\left(F(g_{k+1}) \mid \mathcal{F}_k\right)\right) =$$

$$= \mathbb{E}\left(F(g_{k+1})^2\right) - \mathbb{E}\left(F(g_k)^2\right),$$

por tanto

$$\mathbb{E}\left(\int_G \sum_{k=1}^{+\infty} |F(g_k\gamma) - F(g_k)|^2 d\mu(\gamma)\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{E}\left(F(g_{k+1})^2\right) - \mathbb{E}\left(F(g_k)^2\right) =$$

$$= \lim_{K\to+\infty} \mathbb{E}\left(F(g_{K+1})^2\right) - \mathbb{E}\left(F(g_1)^2\right) < +\infty,$$

pues $f \in C(X)$.

Para finalizar la prueba del Teorema 3.9 notemos

$$\int_X f d(g_n(\omega)\gamma_*\nu) = F(g_n\gamma) \xrightarrow{n\to+\infty} \widehat{F}(\omega),\ \omega\text{-c.s. y } \gamma\text{-c.s.} \tag{3.1.3}$$

Como $C(X)$ es separable (3.1.3) vale para toda $f \in C(X)$. Tomemos entonces $\nu_{\omega,\gamma}$ punto de acumulación de $(g_n(\omega)\gamma_*\nu)_n$, es claro que por (3.1.3), $\nu_{\omega,\gamma} = \nu_{\omega,\gamma'}$ por tanto poniendo $\nu_\omega = \nu_{\omega,\gamma}$ obtenemos $(g_n(\omega)\gamma_*\nu)_n \xrightarrow{w^*} \nu_\omega$.

□

Final de la prueba del Teorema 3.2

Llamemos $g_n = \gamma_1 \dots \gamma_n$, afirmamos que:

($\star$) $(g_n)_n$ no es acotada c.s.

En efecto, por el Teorema 3.9, ω-ctp existe ν_ω tal que

$$g_n(\omega)_*\nu \xrightarrow{n\to+\infty} \nu_\omega, \text{ y} \tag{3.1.4}$$

$$(g_n(\omega)\gamma)_*\nu \xrightarrow{n\to+\infty} \nu_\omega, \text{ para } \gamma\text{-ctp respecto de } \mu. \tag{3.1.5}$$

Fijemos un tal ω, probaremos que $(g_n(\omega))_n$ no es una sucesión acotada. Por absurdo, si lo fuera podemos tomar una subsucesión convergente

$$g_{n_k}(\omega) \xrightarrow{k\to+\infty} g \in G$$

Pero entonces (3.1.4) y (3.1.5) implican que para γ-ctp respecto de μ tenemos $g_*\nu = \nu_\omega = (g\gamma)_*\nu$. Luego $\gamma_*\nu = \nu$ y concluimos que

$$\mu(\{\gamma : \ \gamma_*\nu = \nu\}) = 1.$$

En este caso ν sería una medida invariante para la acción del subgrupo generado por el soporte, que suponemos es no elemental. Por tanto tomando γ hiperbólica tenemos $\nu = \gamma_*^n\nu$, como la medida a la derecha converge débil a una medida atómica (soportada en los puntos fijos de γ) concluimos que ν es atómica lo que es absurdo (ver Proposición 3.7).

Para finalizar basta considerar $(n_k)_k \to +\infty$ tal que

$$g_{n_k}.z = g_{n_k}(\omega).z = \xi_{n_k}\frac{\alpha_{n_k} - z}{1-\overline{\alpha_{n_k}}z} \quad \text{donde } \alpha_k \to \alpha \in S^1 \text{ y } \xi_k \to \xi \in S^1$$

y ver que $(g_{n_k})_*\nu \xrightarrow{k\to+\infty} \delta_{z_\infty(\omega)}$. Pues el límite $(g_n)_*\nu$ existe.

Para esto es clave la siguiente propiedad, denominada en la literatura como 'contractibilidad' (ver [BL85] capítulo II sección 3).

($\triangle$) Para cada $\varepsilon, \delta > 0$ existe $K \geq 0$ tal que

$$|z-\alpha| > \delta \implies |g_{n_k}.z - \xi\alpha| \leq \varepsilon \quad \text{para todo } k \geq K.$$

dicha propiedad y el hecho que ν no tiene átomos (ver Proposición 3.7), implican que $(g_{n_k})_*\nu \to \delta_{\xi\alpha}$.

Prueba de ($\triangle$). Simplemente calculamos

$$|g_{n_k}.z - \xi\alpha| = \frac{|\xi_{n_k}(\alpha_{n_k} - z) - (1-\overline{\alpha_{n_k}}z)\xi\alpha|}{|1-\overline{\alpha_{n_k}}z|} \leq$$

$$\leq \frac{|\xi_{n_k}\alpha_{n_k} - \xi\alpha| + |\overline{\alpha_{n_k}}\xi\alpha - \xi_{n_k}|}{|1-\overline{\alpha_{n_k}}z|},$$

donde usamos que $|z| \leq 1$. Como $\alpha_k \to \alpha$ y $\xi_k \to \xi$ concluimos. □

Resulta entonces que existe una v.a. $z_\infty \in S^1$ tal que c.s.

$$(g_n)_*\nu = (\gamma_1 \dots \gamma_n)_*\nu \xrightarrow{n\to+\infty} \delta_{z_\infty} \quad \text{y entonces}$$

$$g_n.o \xrightarrow{n\to+\infty} z_\infty \quad \text{para todo } o \in \mathbb{D}.$$

Lo que concluye la prueba del Teorema 3.2.

3.2. Ejemplo de Kosenko

En esta sección veremos un ejemplo de caminata al azar en un grupo fuchsiano cocompacto, cuya medida de salida es singular respecto de Lebesgue. El ejemplo es debido a Kosenko, ver [Kos21]. Un resultado más preciso fue obtenido en [CLP21, Teorema F].

Consideremos $\Gamma_{p,q}$ el grupo fuchsiano asociado al teselado por polígonos de p lados a q por vértice (ver Ejemplo 2.17). Luego $\Gamma_{p,q}$ es cocompacto y no elemental.

Tomemos $P_{p,q}$ un polígono fundamental para $\Gamma_{p,q}$. Supongamos que p es par (luego, $p \geq 4$) y llamemos $c_1, \ldots, c_p$ a los lados del polígono. Para cada $i = 1, \ldots, p/2$ existe un único elemento hiperbólico h_i tal que $h_i(c_i) = c_{i+p/2-1}$. Recordemos que $\Gamma_{p,q}$ es generado por $\{h_1, \ldots, h_p\}$.

Teorema 3.10 (Ejemplo de Kosenko).
Sea μ la probabilidad en $\Gamma_{p,q}$ definida por $\mu(h_i^{\pm}) = 1/2p$ para todo $i = 1, \ldots, p$. Entonces si $p \geq 4$ es par y $q \geq 3$ son tales que

$$2 \operatorname{arcosh}\left(\frac{\cos(\pi/q)}{\operatorname{sen}(\pi/p)}\right) > \log(2p) \tag{3.2.1}$$

la medida μ-estacionaria es singular respecto de Lebesgue.

Observación 3.11.

- La caminata inducida por μ en el Teorema 3.10 es la caminata simple. La medida estacionaria existe (ver Teorema 3.2) y es la medida de salida de la caminata (por tanto es única).
- Las hipótesis (3.2.1) no es vacía, de hecho, no se verifica sólo en los casos $(p, q) = (4, 5), (4, 6), (4, 7), (6, 4), (8, 3), (10, 3)$.

Criterio de singularidad BHM

La prueba del Teorema 3.10 es una aplicación de un criterio de singularidad, para enunciar dicho criterio hacemos las siguientes definiciones.

Definición 3.12. El volumen logarítmico de un grupo fuchsiano Γ es

$$v = \limsup_n \frac{1}{n} \log\left(\#\{g \in \Gamma : d(o, g.o) \leq n\}\right)$$

A modo de ejemplo tenemos

Lema 3.13. Para todo grupo fuchsiano cocompacto tenemos $v = 1$.

Demostración. Tomemos P polígono fundamental, y o un punto interior de P. Llamemos $B_R = \{g : d(o, g) \leq R\}$, y $C_R = \{g : gP \cap D(o, R) \neq \emptyset\}$. Es claro que $B_R \subset C_R$.

Si D es el diámetro de P y $R > D$ tenemos

$$D(o, R-D) \subset \bigcup_{g\in B_R} gP \subset \bigcup_{g\in C_R} gP \subset D(o, R+D),$$

tomando áreas

$$\text{Área}(D(o, R-D)) \leq \#B_R\text{Área}(P) \leq \#C_R\text{Área}(P) \subset \text{Área}(D(o, R+D)).$$

Usando (1.1.2), tenemos $\text{Área}(D(o, R\pm D)) = 2\pi(\cosh(R\pm D)-1) = O(e^R)$, luego $\#B_R = O(R)$ y concluimos $v = 1$.

□

Definición 3.14. Si μ es una probabilidad en Γ fuchsiano, consideremos $(g_n)_n$ caminata asociada y llamaremos $F_\mu(g,h) = \mathbb{P}_g(g_n = h \text{ para algún } n)$. La medida de Green asociada a μ es

$$d_\mu(g,h) = -\log(F_\mu(g,h)).$$

Por propiedades de dicha métrica y referencias, ver [BHM11]. En particular el Teorema 1.5 que simplificamos para esta exposición:

Teorema 3.15. Sea Γ grupo fuchsiano cocompacto y no elemental. Consideremos una probabilidad μ en Γ con momento exponencial, simétrica y tal que su soporte genera Γ. Llamemos ν a la medida μ-estacionaria correspondiente. Son equivalentes

1. ν y Leb_{S^1} son equivalentes ($\nu \ll Leb_{S^1}$ y $Leb_{S^1} \ll \nu$).
2. Existe $C > 0$ tal que $|vd(e,g) - d_\mu(e,g)| \leq C$ para todo $g \in \Gamma$.

La idea es ver que el ítem 2 del Teorema 3.15 no se satisface en las hipótesis del Teorema 3.10, por tanto, la medida de salida es singular respecto de Lebesgue (i.e. no se satisface el ítem 1).

Demostración del Teorema 3.10

Recordar las hipótesis del Teorema 3.10, y que tenemos $\Gamma_{p,q} = \langle h_1, \ldots, h_p\rangle$ donde h_i es un elemento hiperbólico que manda el lado c_i en $c_{i+p/2}$.

Dado $k \geq 1$ queremos calcular $d_\mu(e, h_i^k)$, por definición

$$\begin{aligned} F_\mu(e, h_i^k) &= \mathbb{P}_e(g_n = h_i^k, \text{ para algún } n) \geq \\ &\geq \mathbb{P}_e(\gamma_1 = h_i, \ldots, \gamma_k = h_i) = \\ &= \mu(h_i)^k = \left(\frac{1}{2p}\right)^k. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$d_\mu(e, h_i^k) = -\log(F_\mu(e, h_i^k)) \leq k \log(2p).$$

Por otro lado $v = 1$ ya que $\Gamma_{p,q}$ es cocompacto y entonces si $l(h_i)$ es el largo de traslación de h_i

$$\begin{aligned} vd(o, h_i^k.o)) - d_\mu(e, h_i^k) &\geq kl(h_i) + k\log(2p) \\ &= k(l(h_i) + \log(2p)). \end{aligned}$$

Para ver que el ítem 3 del Teorema 3.15 no se satisface basta probar por lo anterior que tenemos $l(h_i) + \log(2p) > 0$.

Lema 3.16. Para cada $i = 1, \ldots, p$ tenemos $l(h_i) = 2\operatorname{arcosh}\left(\dfrac{\cos(\pi/q)}{\operatorname{sen}(\pi/p)}\right)$.

Demostración. Fijemos o punto de intersección de las geodésicas perpendiculares a lados opuestos. Dada una de estas geodésicas tomemos A punto de intersección con alguno de los lados y B vértice en este mismo lado. El triángulo ABo tiene ángulos $\pi/2$, π/p y π/q. Claramente $l(h_i)$ es dos veces la longitud de Ao. Calculamos la longitud de Ao con la ley del coseno hiperbólico, de este modo obtenemos la cantidad

$$\operatorname{arcosh}\left(\frac{\cos(\pi/q)}{\operatorname{sen}(\pi/p)}\right)$$

□

La condición (3.2.1) es exactamente entonces $l(h_i) + \log(2p) > 0$, lo que termina la demostración del Teorema 3.10.

□

Capítulo 4

Discretización y momento exponencial

Sabemos que una probabilidad μ en un grupo fuchsiano tiene asociada una medida ν en S^1 que es μ-estacionaria (bajo hipótesis poco restrictivas, ver sección 3.8, en particular el Teorema 3.8). Dicha medida nos da información sobre el comportamiento asintótico de la caminata al azar con ley μ (ver Teorema 3.2). En este sentido recientemente en [GL23] se demuestra que para ciertas caminatas grupos de Schottky (ver Definición 2.6) la medida estacionaria es singular respecto de Lebesgue.

El resultado de [GL23] apunta hacia la dirección de la siguiente conjetura

Conjetura. (Kaimanovich-LePrince, [KLP11]).
Si μ es una probabilidad en $SL(2, \mathbb{R})$ de soporte finito, tal que su soporte genera un grupo fuchsiano entonces la distribución de la caminata asociada es singular respecto de la medida de Lebesgue.

En este trabajo miramos la otra cara del problema. Fijado un grupo fuchsiano ¿puede ser la medida de Lebesgue[2] la distribución de salida de una caminata en dicho grupo?

En este sentido una restricción evidente es el conjunto límite del grupo, en efecto, si éste no coincide con S^1 no es posible la existencia de una tal medida (ver Definición 2.9 y la Observación 3.3). En este trabajo nos restringimos al caso fuchsiano cocompacto, que como sabemos tiene conjunto límite S^1 (ver Proposición 2.10).

El Teorema principal de este trabajo demuestra que para un grupo fuchsiano cocompacto, podemos construir una medida μ para la cual Lebesgue es estacionaria, y de manera que μ tiene momento exponencial finito (ver Teorema 4.1). En otras palabras si bien no es claro que se pueda conseguir μ de soporte finito (ver la conjetura previa), sí se puede conseguir de manera que dé muy poco peso a elementos grandes.

[2] O una medida equivalente en el sentido de la teoría de la medida.

El Teorema principal

Teorema 4.1 (Discretización con momento exponencial finito).
Para todo grupo fuchsiano cocompacto Γ y $o \in \mathbb{H}$, existe una probabilidad μ en Γ tal que la medida visual ν_o es μ-estacionaria. Además μ tiene momento exponencial finito, i.e.,

$$\text{existe } \varepsilon > 0 \text{ tal que, } \sum_{\gamma \in \Gamma} \exp(\varepsilon \operatorname{dist}(o, \gamma.o))\mu(\gamma) < +\infty. \tag{4.0.1}$$

Demostraremos este teorema por un método de discretización del Movimiento Browniano en $\mathbb{H}$. Este método se describe con detalle en el Capítulo 6, luego en el Capítulo 7 unimos todas las piezas para finalizar la prueba del Teorema 4.1.

El método de discretización fue introducido por Furstenberg en [Fur71]. En este artículo Furstenberg prueba la existencia de la medida μ (para subgrupos discretos de $\mathrm{SL}(d, \mathbb{R})$ de volumen finito, denominados látices) y consigue sólo primer momento, esto es, $\sum_{\gamma \in \Gamma} \operatorname{dist}(o, \gamma.o)\mu(\gamma) < +\infty$.

El problema que Furstenberg resuelve en dicho artículo es un problema de rigidez, la cuestión era saber si un látice Γ de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ puede serlo también en $\mathrm{SL}(d, \mathbb{R})$ para $d \geq 3$. Esencialmente el argumento es si Γ es un látice de $\mathrm{SL}(d, \mathbb{R})$ la médida μ permite identificar cierta frontera (la frontera de Poisson) de Γ con la de $\mathrm{SL}(d, \mathbb{R})$. Como resulta que las fronteras de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ y $\mathrm{SL}(d, \mathbb{R})$ no son identificables se concluye. Remitimos a [Fur71] por los detalles, también comentamos que dicho problema fue resuelto más o menos simultáneamente por medio de la propiedad T de Kazdhan.

El método de discretización fue retomado y generalizado a otras variedades en Lyons-Sullivan [LS84]. En este artículo los autores prueba que existe la medida μ y también se puede deducir de sus argumentos el momento exponencial finito (Ver también Kaimanovich [Kai92], en particular la sección 'remarks' al final). Artículos más recientes en este sentido son Ballmann-Ledrappier [BL96] y Ballmann-Polymerakis [BP21].

Li [LNP21, Teorema A.1] demostró el Teorema 4.1 en el caso que Γ es convexo-cocompacto y ν la medida de Patterson-Sullivan. La motivación de este trabajo es intentar probar el teorema de Li discretizando una modificación del Browniano introducida por Sullivan en [Sul79].

Con la existencia de μ con momento exponencial finito Li prueba (ver Corolario 1.8 en [Li18]) la convergencia a cero de los coeficientes de Fourier de la medida de Patterson-Sullivan, un resultado notable sobre la regularidad de dicha medida.

En el caso convexo-cocompacto la existencia y primer momento finito fueron probadas previamente Por Connell-Muchnik ver [CM07b] y [CM07a]

Capítulo 5

Movimiento Browniano en $\mathbb{H}$

En este capítulo definimos y presentamos algunas propiedades básicas del Movimiento Browniano en $\mathbb{H}$. Para este trabajo, en particular para la prueba del Teorema 4.1, es de relevancia la sección 5.5, donde probamos el momento exponencial del diámetro para el browniano en $\mathbb{H}$ (ver proposición 5.13). Referencias para este capítulo son [Hsu02], [Pra71], [Pra75] y [FLJ12].

5.1. Núcleo del calor en $\mathbb{H}$

La idea es definir el Movimiento Browniano en $\mathbb{H}$ dando explícitamente sus probabilidades de transición mediante el núcleo del calor (comparar con **??**).

En esta sección definimos el núcleo del calor en $\mathbb{H}$. Por referencias ver [Hsu02] y [Bus92].

Dada $u \in C^2(\mathbb{H})$ su laplaciano (en la métrica hiperbólica) es

$$\Delta u(x+iy) = y^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x+iy) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x+iy) \right).$$

Teorema 5.1 (Núcleo del calor)**.**
Existe una única solución fundamental a la ecuación del calor en $\mathbb{H}$, esto es, existe una única función $p : (0,+\infty) \times \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ tal que:

1. Es estrictamente positiva y de clase C^∞.
2. Satisface la ecuación del calor: $\frac{1}{2}\Delta p(t,z,w) = \frac{\partial p}{\partial t}(t,z,w)$, para todo $w \in \mathbb{H}$.
3. $\lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{H}} p(t,z,w) f(z) dz = f(w)$ para todo $w \in \mathbb{H}$, $f \in C_b(\mathbb{H})$.

Donde, en el ítem 3, $C_b(\mathbb{H}) = \{f : \mathbb{H} \to \mathbb{R} : \ f \text{ es continua y acotada}\}$.

Demostración. Ver Teorema 4.1.4 de [Hsu02]. Notar que allí se habla de 'minimal heat kernel', esto es debido a que para variedades en general no hay unicidad y las probabilidades de transición para el browniano están dadas por este núcleo. Sin embargo, en el caso de $\mathbb{H}$ sí tenemos unicidad ya que $\mathbb{H}$ es completo y tiene curvatura constante, ver capítulo VIII de [Cha84], en particular el Teorema 4 allí. Se pueden dar fórmulas "explícitas" para el núcleo del calor, ver [Cha84] capítulo X o [Bus92] capítulo 7.

□

Lema 5.2. El núcleo del calor en $\mathbb{H}$, $p : (0, +\infty) \times \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ satisface

1. $p(t, x, y) = p(t, y, x),$ para todo $t \geq 0,$ y $x, y \in \mathbb{H}$
2. $p(t + s, x, y) = \int_{\mathbb{H}} p(t, x, z)p(s, z, y)dz,$ para todos $t, s \geq 0,$ $x, y \in \mathbb{H}$.
3. $\int_{\mathbb{H}} p(t, x, y)dy = 1$ para todo $t \geq 0, x \in \mathbb{H}$.
4. $p(t, gx, gy) = p(t, x, y)$ para todo $t \geq 0,$ y $x, y \in \mathbb{H},$ y toda $g \in \mathrm{Isom}(\mathbb{H})$.

Demostración. Ver también el Teorema 4.1.4 de [Hsu02]. □

Lema 5.3. Existe $C > 0$ tal que

$$p(t, x, y) \leq \frac{C}{t} \exp\left(-\frac{\mathrm{dist}(x, y)^2}{4t}\right) \quad \text{para todos } x, y \in \mathbb{H}, \text{ y } t \geq 0 \tag{5.1.1}$$

Demostración. Ver Teorema 3.1 en [DM88]. □

Corolario 5.4.

$$\int_{\mathbb{H}\setminus B(x,r)} p(t, x, y)dy \leq C \exp\left(\frac{-r^2}{4t}\right) \tag{5.1.2}$$

5.2. Definición del Movimiento Browniano en $\mathbb{H}$

En esta sección $p : (0, +\infty) \times \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ denotará el núcleo del calor en $\mathbb{H}$ (ver sección 5.1). El siguiente teorema define lo que llamaremos Movimiento Browniano en $\mathbb{H}$.

Teorema 5.5 (Movimiento browniano en $\mathbb{H}$)**.**
Existe un proceso de Markov $(X_t)_{t\geq 0}$ en $\mathbb{H}$ continuo y tal que

$$\mathbb{P}(X_t \in E \mid X_0) = \int_E p(t, X_0, y)dy, \quad \text{para todo } E \subset \mathbb{H} \text{ boreleano.} \tag{5.2.1}$$

Llamamos Movimiento Browniano en $\mathbb{H}$ a cualquier proceso de Markov $(X_t)_{t\geq 0}$ que satisface 5.2.1.

Demostración. Consideremos el núcleo del calor $p : (0, +\infty) \times \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ (ver Teorema 5.1). Definimos el semigrupo del calor $(P_t)_{t \geq 0}$ como:

$$P_0 = \mathrm{Id},$$

$$P_t f(x) = \int_{\mathbb{H}} f(y) p(t, x, y) dy \quad \text{para toda } f \in B(\mathbb{H}), \text{ y } t > 0,$$

donde $B(\mathbb{H}) = \{f : \mathbb{H} \to \mathbb{R} : \ f \text{ medible borel y acotada}\}$. Debemos probar, teniendo en cuenta el Teorema A.34, que $(P_t)_{t \geq 0}$ tiene las siguientes propiedades

1. $P_t \mathbb{1} = \mathbb{1}$, para todo $t \geq 0$.
2. P_t es un operador acotado en $B(\mathbb{H})$ tal que $||P_t|| = 1$, para todo $t \geq 0$.
3. $P_{t+s} = P_s P_t = P_t P_s$, para todos $t, s \geq 0$.
4. $f \geq 0 \implies P_t f \geq 0$, para todo $t \geq 0$.
5. $P_t C_0(\mathbb{H}) \subset C_0(\mathbb{H})$, para todo $t \geq 0$.
6. $||P_t f - f||_\infty \xrightarrow{t \to 0} 0$, para toda $f \in C_0(\mathbb{H})$.
7. $\displaystyle \lim_{t \to 0} \frac{P_t \mathbb{1}_{B(x,\varepsilon)^c}(x)}{t} = 0$, para todo $x \in \mathbb{H}$, y $\varepsilon > 0$.

Prueba de 1. Es otra forma de enunciar el ítem 3 del lema 5.2. ◇

Prueba de 2. Para cada $t \geq 0$ es claro que P_t es lineal en $B(\mathbb{H})$. Además dada $f \in B(\mathbb{H})$ por el lema 5.2 y que $p > 0$, concluimos

$$|P_t f(x)| \leq ||f||_\infty, \text{ entonces } ||P_t f||_\infty \leq ||f||_\infty \text{ para toda } f \in B(\mathbb{H}).$$

Luego no sólo P_t es un operador acotado, si no que además $||P_t|| \leq 1$. De hecho por el ítem 7 arriba, $||P_t|| = 1$. ◇

Prueba de 3. Es una consecuencia del ítem 2 del lema 5.2 y Fubini. ◇

Prueba de 4. Inmediato ya que $p > 0$. ◇

Prueba de 5. Fijemos $t \geq 0$ y $f \in C_0(\mathbb{H})$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $K \subset \mathbb{H}$ compacto tal que $|f(y)| \leq \varepsilon$ para todo $y \in \mathbb{H} \setminus K$.

Por otro lado el corolario 5.4 implica que existe $r > 0$ (que depende sólo de $\varepsilon, t > 0$) tal que

$$\int_{\mathbb{H} \setminus B(x,r)} p(t, x, y) dy \leq \varepsilon, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{H}.$$

Consideremos entonces el compacto $K' = \{x \in \mathbb{H} : \operatorname{dist}(x, K) \leq r\}$, tenemos que si $x \in \mathbb{H} \setminus K'$

$$\begin{aligned}
|P_t f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{H}} p(t,x,y) f(y) dy \right| \leq \\
&\leq \int_{\mathbb{H}\setminus B(x,r)} p(t,x,y)|f(y)|dy + \int_{B(x,r)} p(t,x,y)|f(y)|dy \leq \\
&\leq ||f||_\infty \int_{\mathbb{H}\setminus B(x,r)} p(t,x,y)dy + \varepsilon \int_{B(x,r)} p(t,x,y)dy \leq \\
&\leq (||f||_\infty + 1)\varepsilon.
\end{aligned}$$

De donde concluimos $P_t f \in C_0(\mathbb{H})$ ◇

Prueba de 6. Fijemos $f \in C_0(\mathbb{H})$ y $\varepsilon > 0$. Dado $x \in \mathbb{H}$ tenemos por el ítem 3 del lema 5.2 que

$$\begin{aligned}
|P_t f(x) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{H}} p(t,x,y) f(y) dy - f(x) \right| = \\
&= \left| \int_{\mathbb{H}} p(t,x,y)(f(y) - f(x)) dy \right| \leq \\
&\leq \int_{\mathbb{H}} p(t,x,y)|f(y) - f(x)|dy.
\end{aligned}$$

Ahora, como f es uniformemente continua, existe $\delta > 0$ tal que $\operatorname{dist}(x, y) \leq \delta$ implica $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Además el corolario 5.4 implica que:

$$\text{Existe } t_0 > 0 \text{ tal que } \int_{\mathbb{H}\setminus B(x,\delta)} p(t,x,y)dy \leq \varepsilon, \quad \text{para todo } 0 \leq t \leq t_0.$$

Combinando ambas desigualdades obtenemos

$$\begin{aligned}
|P_t f(x) - f(x)| &\leq \int_{\mathbb{H}\setminus B(x,\delta)} p(t,x,y)|f(y) - f(x)|dy + \\
&+ \int_{B(x,\delta)} p(t,x,y)|f(y) - f(x)|dy \leq \\
&\leq (2||f||_\infty + 1)\varepsilon \quad \text{para todo } x \in \mathbb{H}.
\end{aligned}$$

Por tanto $||P_t f - f||_\infty \leq (2||f||_\infty + 1)\varepsilon$ para todo $0 \leq t \leq t_0$ ◇

Prueba de 7. Notemos primero que dado $x \in \mathbb{H}$ y $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{t \to 0} \frac{P_t \mathbb{1}_{B(x,\varepsilon)^c}(x)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int_{\mathbb{H}\setminus B(x,\varepsilon)} p(t,x,y)dy = 0,$$

por el corolario 5.4. ◇

□

Observación 5.6. Una consecuencia del teorema precedente es que dada ν una probabilidad en $\mathbb{H}$ el núcleo del calor define una medida de Borel en $C([0,+\infty),\mathbb{H})$ dada por

$$\mathbb{P}_\nu(E) = \mathbb{P}((X_t)_{t\geq 0} \in E), \text{ y}$$

$$\mathbb{E}_\nu(f) = \mathbb{E}(f((X_t)_{t\geq 0}))$$

donde $(X_t)_{t\geq 0}$ es un browniano tal que $X_0 \sim \nu$.

Cuando $\nu = \delta_x$ con $x \in \mathbb{H}$ decimos que el Movimiento Browniano comienza en x y denotamos $\mathbb{P}_x = \mathbb{P}_{\delta_x}$ y $\mathbb{E}_x = \mathbb{E}_{\delta_x}$.

Por último notemos que si $X_0 = x$ c.s. entonces $(X_t)_{t\geq 0}$ es un Movimiento Browniano en $\mathbb{H}$ si y sólo si

$$\mathbb{P}(X_t \in E) = \int_E p(t,x,y)dy \text{ para todo } t \geq 0.$$

El siguiente lema permite reducir la prueba de ciertas propiedades del Movimiento Browniano al caso en que dicho proceso parte de un punto arbitrario pero determinado.

Lema 5.7. Dado E boreleano de $C([0,+\infty),S)$ tenemos que el mapa $x \to \mathbb{P}_x(E)$ es medible y

$$\mathbb{P}_\nu(E) = \int_{\mathbb{H}} \mathbb{P}_x(E)d\nu(x) \text{ para toda probabilidad } \nu \text{ en } \mathbb{H}. \tag{5.2.2}$$

Demostración. Ver Capítulo 4, Proposición 1.2 [EK86]. □

5.3. Propiedades básicas

Empezamos con una propiedad clave que es la de Markov fuerte, ver sección A.5.2.

Proposición 5.8. Un Movimiento Browniano $(X_t)_{t\geq 0}$ en $\mathbb{H}$ tiene la propiedad de Markov fuerte, esto es, dado τ tiempo de parada c.s. finito tenemos que el proceso $(X_{t+\tau})_{t\geq 0}$ es un Movimiento Browniano en $\mathbb{H}$ independiente de $\mathcal{F}_\tau$.

En particular

$$\mathbb{E}_x(f((X_{t+\tau})_{t\geq 0}) \mid \mathcal{F}_\tau) = \mathbb{E}_{X_\tau}(f) \text{ para todo } x \in \mathbb{H}. \tag{5.3.1}$$

Demostración. Que satisface la propiedad de Markov fuerte es consecuencia del Teorema 5.5 y de la Proposición A.37. Luego la fórmula 5.2.1 es exactamente A.5.7 para el proceso $(X_{\tau+t})_{t\geq 0}$, por lo que este último es un Movimiento Browniano en $\mathbb{H}$. La fórmula 5.3.1 es también parte del Teorema A.5.7. □

Proposición 5.9. Para toda $g \in \mathrm{Isom}(\mathbb{H})$, $(gX_t)_{t\geq 0}$ es un Movimiento Browniano.

Demostración. Verificamos la fórmula (5.2.1). Tenemos

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(gX_t \in E \mid gX_0) = \mathbb{P}(X_t \in g^{-1}E \mid X_0) = \\ &= \int_{g^{-1}E} p(t, X_0, y)dy = \\ &= \int_E p(t, X_0, g^{-1}y)dy = \\ &= \int_E p(t, gX_0, y)dy.\end{aligned}$$

Donde la última igualdad es consecuencia del ítem 4 en la Proposición 5.2. □

Proposición 5.10. El Movimiento Browniano en $\mathbb{H}$ comenzando en $i = (0, 1) \in \mathbb{H}$ es la única solución $(X_t)_{t\geq 0}$ a la ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = \begin{pmatrix} y_t & 0 \\ 0 & y_t \end{pmatrix} dB_t, \quad \text{donde } X_t = x_t + iy_t. \tag{5.3.2}$$

Explícitamente, si $B_t = (B_t^{(1)}, B_t^{(2)})$

$$X_t = \int_0^t \exp(B_s^{(2)} - s)dB_s^{(1)} + i\exp(B_t^{(2)} - t). \tag{5.3.3}$$

Demostración. Primero observamos que existe una única solución a la ecuación diferencial estocástica 5.3.2 (ver Teorema 7.1, Capítulo 2 §7 en [Bor17]). Basta probar (ver la observación 5.6) que dicha solución tiene probabilidades de transición dadas por

$$\mathbb{P}_i(X_t \in E) = \int_E p(t, i, w)dw, \quad \text{para todo } t \geq 0 \text{ y } E \text{ boreleano en } \mathbb{H},$$

o equivalentemente que

$$\mathbb{E}_i(f(X_t)) = \int p(t, i, w)f(w)dw, \quad \text{para todo } t \geq 0 \text{ y } f \in C_b(\mathbb{H}). \tag{5.3.4}$$

Con este fin, fijemos $f \in C_b(\mathbb{H})$ y consideremos $u(t, z) = \int_{\mathbb{H}} p(t, z, w)f(w)dw$. Por la fórmula de Itô (ver Teorema 4.4, Capítulo II §2 en [Bor17]. También notar el 'Remark' 4.3):

$$\begin{aligned}u(t - s, X_s) - u(t, X_0) = &- \frac{\partial u(t - s, X_s)}{\partial s}ds + \frac{1}{2}\Delta u(t - s, X_s)ds + \\ &+ \frac{\partial u(t - s, X_s)}{\partial x}y_s dB_s^{(1)} + \frac{\partial u(t - s, X_s)}{\partial y}y_s dB_s^{(2)}.\end{aligned}$$

Como u es solución a la ecuación del calor, i.e.

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial s} = \frac{1}{2}\Delta u(t, x), \quad \text{para todos } t \geq 0 \text{ y } x \in \mathbb{H},$$

concluimos:

$$u(t-s, X_s) - u(t,i) = \frac{\partial u(t-s, X_s)}{\partial x} y_s dB_s^{(1)} + \frac{\partial u(t-s, X_s)}{\partial y} y_s dB_s^{(2)},$$

y por tanto el proceso $(u(t-s, X_s))_{s\in[0,t]}$ es una martingala (es una martingala local por la Proposición 3.2, Capítulo 2 en [EK86] y una martingala local acotada es una martingala). Esto implica en particular que

$$\mathbb{E}_i(f(X_t)) = u(t,i) = \mathbb{E}_i(u(t-s, X_s)), \text{ para todo } s \in [0,t].$$

Por último afirmamos que

$$(\star) \quad u(t-s, X_s) \xrightarrow{s\to t} f(X_t) \quad \text{c.s.}$$

de donde por convergencia dominada se concluye la igualdad (5.3.4).

Para probar $(\star)$ notemos que

$$\begin{aligned} |u(t-s, X_s) - f(X_t)| &= |P_{t-s}f(X_s) - f(X_t)| \leq \\ &\leq |P_{t-s}f(X_s) - f(X_s)| + |f(X_s) - f(X_t)| \leq \\ &\leq ||P_{t-s}f - f||_\infty + |f(X_s) - f(X_t)|, \end{aligned}$$

el término a la izquierda tiende a cero cuando $s \to t$ pues $(P_t)_{t\geq 0}$ es un C^0-semigrupo (ver prueba del Teorema 5.5), mientras que el término a la derecha tiende a cero cuando $s \to t$ ya que $(X_t)_{t\geq 0}$ es c.s. continuo al ser solución de (5.3.2) (ver Capítulo 2 §7 en [Bor17]). □

5.4. No recurrencia y velocidad

Proposición 5.11. El Movimiento Browniano en $\mathbb{H}$ es no recurrente.

Demostración. Basta probar el resultado suponiendo que $X_0 = i$. Con la notación de la proposición 5.3.2 resulta $\log(y_t) = B_t - t$, donde $(B_t)_{t\geq 0}$ es un browniano en $\mathbb{R}$. Como $\frac{B_t}{t} \xrightarrow{t\to\infty} 0$ c.s. (ver proposición A.19), resulta $\frac{\log(y_t)}{t} \xrightarrow{t\to+\infty} -1$ c.s., y por tanto $y_t \xrightarrow{t\to+\infty} 0$ c.s. □

El siguiente resultado fue probado por Prat con mayor generalidad en [Pra75] (ver también [Pra71]).

Teorema 5.12 (Prat).
Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ Movimiento Browniano en $\mathbb{H}$, tenemos

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{d_{\mathbb{H}}(X_0, X_t)}{t} = 1, \quad \text{casi seguramente.} \tag{5.4.1}$$

Demostración. Supongamos sin pérdida de generalidad que $X_0 = i$ y llamemos $r_t = d(i, X_t)$ (en la literatura este es denominado proceso radial, ver por ejemplo [Hsu02]).

Por la fórmula de Itô, existe $(B_t)_{t\geq 0}$ Movimiento Browniano en $\mathbb{R}$, tal que

$$r_t = B_t + \int_0^t \coth(r_s)ds \geq B_t + t,$$

de donde

$$\liminf \frac{d(i, X_t)}{t} = \liminf \frac{r_t}{t} \geq 1. \tag{5.4.2}$$

Ahora fijemos $k > 0$, sea R_k tal que $1 < \coth(r) < 1 + \frac{1}{k}$ para todo $r \geq R_k$. La desigualdad 5.4.2 implica que casi seguramente existe $T_k \geq 0$ tal que

$$r_t \geq R_k, \quad \text{para todo } t \geq T_k.$$

Luego para todo $t \geq T_k$

$$r_t \leq B_t + \int_0^{T_k} \coth(r_s)ds + (t - T_k)(1 + \frac{1}{k}),$$

de donde $\limsup \dfrac{r_t}{t} \leq 1 + \frac{1}{k}$. Como $k > 0$ es arbitrario,

$$1 \leq \liminf \frac{r_t}{t} \leq \limsup \frac{r_t}{t} \leq 1.$$

□

5.5. Momento exponencial del diámetro

En esta sección probamos el momento exponencial del diámetro para el Movimiento Browniano en $\mathbb{H}$. Este resultado técnico es de particular para este trabajo, en particular para la prueba del Teorema 4.1. El enunciado es el siguiente

Proposición 5.13. Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un Movimiento Browniano en $\mathbb{H}$, y denotemos por $D_t = \text{diám}\{X_s : s \in [0, t]\}$. Existe $\delta > 0$ tal que

$$\mathbb{E}\left(e^{\delta D_t}\right) < +\infty$$

Para la prueba haremos uso de la siguiente desigualdad

Lema 5.14. Sea $x + iy \in \mathbb{H}$, tenemos

$$\text{dist}_{\mathbb{H}}(i, x + iy) \leq |\log(y)| + \log(2|x| + 1)$$

Demostración.

$$\begin{aligned}\mathrm{dist}_{\mathbb{H}}(i, x+iy) &\leq \mathrm{dist}_{\mathbb{H}}(x+i, x+iy) + \mathrm{dist}_{\mathbb{H}}(i, x+i) = \\ &= |\log(y)| + \log(|x| + \sqrt{x^2+1}) \leq \\ &\leq |\log(y)| + \log(2|x|+1).\end{aligned}$$

□

Demostración de la Proposición 5.13.

Observamos primero que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(e^{\delta D_t}\right) &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(e^{\delta D_t} \geq w)dw = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}(D_t \geq u)ue^{\delta u}du.\end{aligned}$$

Por esto, basta ver que la cola de la distribución de D_t es subexponencial.

Supongamos sin pérdida de generalidad que $X_0 = i$ y consideremos $X_t = x_t + iy_t$ como en la proposición 5.10. Tenemos

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(D_t \geq 4R\right) &\leq \mathbb{P}\left(\text{máx}\{d(i, X_s) : s \in [0,t]\} \geq 2R\right) \leq \\ &\leq \mathbb{P}(\text{máx}\{|\log(y_s)| + \log(2|x_s|+1) : s \in [0,t]\} \geq 2R) \leq \\ &\leq \mathbb{P}(\max_{s\in[0,t]}\{|\log(y_s)|\} + \max_{s\in[0,t]}\{\log(2|x_s|+1)\} \geq 2R) \leq \\ &\leq \mathbb{P}(\max_{s\in[0,t]}\{|\log(y_s)|\} \geq R) + \mathbb{P}(\max_{s\in[0,t]}\{\log(2|x_s|+1)\} \geq R).\end{aligned}$$

Donde la primera desigualdad está dada por la desigualdad triangular:

$$D_t \leq 2\,\text{máx}\{d(X_0, X_s) : s \in [0,t]\},$$

y la segunda desigualdad por el lema 5.14.

Por un lado

$$\mathbb{P}\left(\max_{s\in[0,t]}\{|\log(y_s)|\} \geq R\right) = \mathbb{P}\left(\max_{s\in[0,t]}\{|B_s^{(2)} - s|\} \geq R\right)$$

decae subexponencialmente con R por la proposición A.27.

Por otro lado

$$\mathbb{P}\left(\max_{s\in[0,t]}\{\log(2|x_s|+1)\} \geq R\right) = \mathbb{P}\left(\max_{s\in[0,t]}\{|x_s|\} \geq e^R/2 - 1\right)$$

Al ser $(x_t)_{t\geq 0}$ una martingala continua, la desigualdad de Doob (ver Teorema A.14) implica

$$\mathbb{P}\left(\max_{s\in[0,t]}\{|x_s|\} \geq e^R/2 - 1\right) \leq \frac{\mathbb{E}(x_t^2)}{(e^R/2-1)^2} \leq \frac{C_t \exp(-R/2)}{R}.$$

□

5.6. Medida armónica

En esta sección trabajaremos en el modelo del disco. El browniano en $\mathbb{D}$ se construye de igual manera que en $\mathbb{H}$ (ver sección 5.2). Esto es equivalente a la siguiente definición.

Definición 5.15. Un proceso estocástico $(X_t)_{t\geq 0}$ en $\mathbb{D}$ es un Movimiento Browniano si $(\phi(X_t))_{t\geq 0}$ es un browniano en $\mathbb{H}$ donde $\phi : \mathbb{D} \to \mathbb{H}$ es cualquier isometría.

Proposición 5.16. Para $(X_t)_{t\geq 0}$ browniano en $\mathbb{D}$ existe casi seguramente

$$X_\infty = \lim_{t\to+\infty} X_t \in \partial\mathbb{D}.$$

Demostración. Sabemos que si $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ es armónica entonces $(f(X_t))_{t\geq 0}$ es una martingala. En particular

$$(\mathrm{Re}(X_t))_{t\geq 0} \;\text{ y }\; (\mathrm{Im}(X_t))_{t\geq 0}$$

son martingalas acotadas, por tanto, el teorema de convergencia de martingalas (ver Teorema A.15) implica que existen casi seguramente los límites

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{Re}(X_t) \;\text{ y }\; \lim_{t\to+\infty} \mathrm{Im}(X_t).$$

Luego casi seguramente existe $X_\infty = \lim_{t\to+\infty} X_t = \lim_{t\to\infty} \mathrm{Re}(X_t) + i\mathrm{Im}(X_t)$ como se quería demostrar. □

Definición 5.17 (Medida armónica)**.** Dado $z \in \mathbb{D}$ definimos ν_z probabilidad en $\partial\mathbb{D}$ como

$$\nu_z(E) = \mathbb{P}_z(X_\infty \in E), \quad \text{para todo boreleano } E \subset \partial\mathbb{D}. \tag{5.6.1}$$

Proposición 5.18. La medida armónica ν_z es la medida visual definida en 1.21

Demostración. Esto es simplemente notar que primero la invariancia por isometrías del Movimiento Browniano en $\mathbb{D}$ implica que ν_0 es la medida de Lebesgue en S^1. Luego tomando g isometría que lleva 0 a $z \in \mathbb{D}$ cualquiera, usando otra vez la invariancia por isometrías tenemos

$$\begin{aligned}\nu_z(E) &= \mathbb{P}_0(g.X_t \in E) = \\ &= \mathrm{Leb}(g^{-1}E) = \\ &= g_*\mathrm{Leb}(E).\end{aligned}$$

Concluimos usando la Proposición 1.22. □

5.7. Medida de barrido

Dado $E \subset \mathbb{D}$ cerrado definimos el tiempo de parada

$$\tau_E = \text{ínf}\{t \geq 0 : X_t \in E\}.$$

Definición 5.19 (Medida de barrido)**.** Dado un conjunto cerrado $E \subset \mathbb{D}$ definimos la medida de barrido de z en E como

$$\beta_{z,E}(A) = \mathbb{P}_z(X_{\tau_E} \in A,\ \tau_E < +\infty) \text{ para todo boreleano } A \subset E.$$

La imagen detrás del nombre es que 'barremos' la medida δ_z hasta E. Una propiedad clave es la siguiente

Proposición 5.20. Si E es cerrado y $z \in E^c$ es tal que $\mathbb{P}_z(\tau_E < +\infty) = 1$, la función $z \to \beta_{z,E}(A)$ es armónica en la componente conexa que contiene a E^c para todo boreleano $A \subset E$.

Para la prueba de esta proposición empezamos con un lema

Lema 5.21. Sea E cerrado, la función $h_E(z) = \mathbb{P}_z(\tau_E < +\infty)$ es armónica en E^c.

Demostración. Sea B una bola tal que $\overline{B} \subset E^c$, basta ver que h_E es armónica en B. Llamemos $D = \partial B$, por la propiedad de Markov fuerte (ver proposición 5.8), tenemos para $z \in B$ que

$$\begin{aligned} h_E(z) &= \mathbb{P}_z(\tau_E < +\infty) \\ &= \mathbb{E}_z(\mathbb{1}_{\{\tau_E < +\infty\}}) = \\ &= \mathbb{E}_z(\mathbb{E}_z(\mathbb{1}_{\{\tau_E < +\infty\}} \mid \mathcal{F}_{\tau_D})) = \\ &= \mathbb{E}_z(\mathbb{E}_{X_{\tau_D}}(\mathbb{1}_{\{\tau_E < +\infty\}})) = \\ &= \mathbb{E}_z(h_E(X_{\tau_D})). \end{aligned}$$

Consideremos ahora la única solución $u : \overline{B(z,\delta)} \to \mathbb{R}$ al problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u(w) = h_E(w) \quad \text{para } w \in \partial B(z,\delta) \end{cases}$$

Como $\Delta u = 0$ implica $\Delta_{\mathbb{D}} u = 0$, tenemos que $(u(X_{t\wedge\tau_D}))_{t\geq 0}$ es una martingala. Luego el teorema de parada opcional (ver Teorema A.13) implica

$$u(z) = u(X_0) = \mathbb{E}_z(u(X_{t\wedge\tau_D})) \text{ para todo } t \geq 0. \tag{5.7.1}$$

Como $\mathbb{P}_z(\tau_D < +\infty) = 1$ y u es acotada, por convergencia dominada

$$u(z) = \mathbb{E}_z(u(X_{\tau_D})) = \mathbb{E}_z(h_E(X_{\tau_D})) = h_E(z). \tag{5.7.2}$$

Esta igualdad es válida para cada $z \in B$ por lo que $u = h_E$ en B, y por tanto h_E es armónica.

□

Demostración de la proposición 5.20. Por el lema anterior y el principio del máximo implican que $\mathbb{P}_w(\tau_E < +\infty) = 1$ para todo w en la componente conexa de E^c que contiene a z.

Llamemos U a dicha componente conexa, tomemos ahora B una bola tal que $\overline{B} \subset U$, denotemos por $C = \partial B$. Basta ver que $u(w) = \beta_{w,E}(A)$ es armónica en B.

Tomemos entonces $w \in B$, por la propiedad de Markov fuerte (ver Proposición 5.8),

$$\begin{aligned} u(w) &= \mathbb{P}_w(X_{\tau_E} \in A) = \\ &= \mathbb{E}_w(\mathbb{1}_{\{X_{\tau_E} \in A\}}) = \\ &= \mathbb{E}_w(\mathbb{E}_w(\mathbb{1}_{\{X_{\tau_E} \in A\}} \mid \mathcal{F}_{\tau_C})) = \\ &= \mathbb{E}_w(\mathbb{E}_{X_{\tau_C}}(\mathbb{1}_{\{X_{\tau_E} \in A\}})) = \\ &= \mathbb{E}_w(u(X_{\tau_C})). \end{aligned}$$

El mismo argumento utilizado en el lema previo muestra que u es armónica en B. □

Corolario 5.22. Dado $o \in \mathbb{D}$ y $0 < r < R$, existe $C > 0$ tal que

$$\frac{1}{C} \leq \frac{d\beta_{x,\partial B(o,R)}}{d\beta_{y,\partial B(o,R)}}(z) \leq C$$

para todos $x, y \in B(o, r)$ y $z \in \partial B(o, R)$.

Demostración. Por la Proposición 5.20 sabemos que la función $z \to \beta_{z,E}(A)$ es armónica, donde $E = B(o, R)$ y $A \subset E$ es un boreleano cualquiera. Luego por la desigualdad de Harnack (Teorema 1.31) existe $C > 0$ tal que

$$\frac{1}{C}\beta_{y,E}(A) \leq \beta_{x,E}(A) \leq C\beta_{y,E}(A). \tag{5.7.3}$$

Como $C > 0$ no depende de A concluimos el corolario. □

5.8. Movimiento Browniano en $\mathbb{H}/\Gamma$

Fijemos en lo que sigue Γ grupo fuchsiano cocompacto sin elementos elípticos, de esta manera $\mathbb{H}/\Gamma$ es una superficie compacta. Más aún, $\mathbb{H}/\Gamma$ hereda una métrica de $\mathbb{H}$ y una medida de área. Denotamos por $\pi : \mathbb{H} \to \mathbb{H}/\Gamma$ al mapa cociente.

Definiremos de manera análoga al caso de $\mathbb{H}$ a qué nos referiremos por Movimiento Browniano en $\mathbb{H}/\Gamma$ (ver sección 5.2), a modo de motivación empezamos con la siguiente observación

Observación 5.23. Una propiedad deseable es que si $(X_t)_{t\geq 0}$ es un browniano en $\mathbb{H}$ entonces $(\pi(X_t))_{t\geq 0}$ sea un browniano en $\mathbb{H}/\Gamma$. Por otro lado fijemos un boreleano $E \subset \mathbb{H}/\Gamma$, y pongamos $\pi^{-1}(E) = \bigcup_g g\widetilde{E}$, donde la unión es disjunta.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}_x(\pi(X_t) \in E) = \mathbb{P}_x(X_t \in \pi^{-1}(E))& \\
&= \int_{\pi^{-1}(E)} p(t,x,y)dy = \\
&= \sum_{g\in\Gamma} \int_{g\widetilde{E}} p(t,x,y) = \\
&= \sum_{g\in\Gamma} \int_{\widetilde{E}} p(t,x,gy) = \\
&= \int_{\widetilde{E}} \sum_{g\in\Gamma} p(t,x,gy),
\end{aligned}
$$

esto nos da el candidato a núcleo del calor en $\mathbb{H}/\Gamma$.

Teorema 5.24 (Núcleo del calor en $\mathbb{H}/\Gamma$)**.**
Existe una única solución fundamental a la ecuación del calor en $\mathbb{H}/\Gamma$, esto es, existe una única función $p_\Gamma : (0,+\infty) \times \mathbb{H}/\Gamma \times \mathbb{H}/\Gamma \to \mathbb{R}$ tal que:

1. Es estrictamente positiva y de clase C^∞.
2. Satisface la ecuación del calor: $\dfrac{1}{2}\Delta p_\Gamma(t,p,q) = \dfrac{\partial p}{\partial t}(t,p,q),\ q \in \mathbb{H}/\Gamma$.
3. $\lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{H}/\Gamma} p_\Gamma(t,p,q) f(p) dp = f(q)$ para todo $q \in \mathbb{H}/\Gamma,\ f \in C_b\left(\mathbb{H}/\Gamma\right)$.

Además, si $p : (0,+\infty) \times \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ es el núcleo del calor en $\mathbb{H}$, entonces

$$
p_\Gamma(t,p,q) = \sum_{g\in\gamma} p(t,x,gy), \text{ donde } \pi(x) = p, \pi(y) = q. \tag{5.8.1}
$$

Demostración. Comparar con el Teorema 5.1 y ver las referencias allí dadas. Por la fórmula (5.8.1) ver el Teorema 7.5.11, capítulo 7 §5 de [Bus92]. □

Teorema 5.25 (Movimiento browniano en $\mathbb{H}/\Gamma$)**.**
Existe un proceso de Markov $(M_t)_{t\geq 0}$ en $\mathbb{H}/\Gamma$ continuo y tal que

$$
\mathbb{P}(M_t \in E \mid M_0) = \int_E p_\Gamma(t, X_0, y) dy, \quad \text{para todo } E \subset \mathbb{H}/\Gamma \text{ boreleano.} \tag{5.8.2}
$$

Llamamos Movimiento Browniano en $\mathbb{H}/\Gamma$ a cualquier proceso de Markov $(M_t)_{t\geq 0}$ que satisface 5.8.2.

Demostración. Comparar con el Teorema 5.5. De hecho la prueba se simplifica debido a que $\mathbb{H}/\Gamma$ es compacta. □

Notar que ahora que este Teorema sumado a la observación 5.23 implican,

Proposición 5.26. Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un Movimiento Browniano en $\mathbb{H}$, entonces el proceso $(\pi(X_t))_{t\geq 0}$ es un Movimiento Browniano en ${}^{\mathbb{H}}\!/_{\Gamma}$.
Además vale la siguiente fórmula

$$\mathbb{P}_x(X_t \in \pi^{-1}(E)) = \mathbb{P}_{\pi(x)}(\pi(X_t) \in E), \quad \text{para todo } E \subset {}^{\mathbb{H}}\!/_{\Gamma}, \text{ boreleano.} \tag{5.8.3}$$

Capítulo 6

Discretización del Movimiento Browniano

Como anunciamos, en este capítulo presentamos el método de discretización del Movimiento Browniano. Resumimos su contenido en el siguiente lema, donde un punto técnico de interés particular para este trabajo es el ítem 4.

Lema 6.1 (Discretización del Movimiento Browniano)**.**
Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un Movimiento Browniano en $\mathbb{H}$ que parte de o, y Γ un grupo fuchsiano cocompacto. Existe $R > 0$ y una sucesión de tiempos de parada $\tau_1 < \tau_2 < \cdots$ tales que:

1. Casi seguramente $\tau_n < +\infty$ para todo n.
2. Casi seguramente para cada n existe un único elemento $\gamma_n \in \Gamma$ tal que $\mathrm{dist}(X_{\tau_n}, \gamma_n o) \leq R$.
3. Definiendo $g_n = \gamma_{n-1}^{-1}\gamma_n$ la sucesión $g_1, \ldots, g_n$ es i.i.d..
4. El tiempo τ_1 tiene momento exponencial finito.

6.1. Demostración del lema 6.1

6.1.1. Construcción de los tiempos de parada

Fijemos $o \in \mathbb{H}$. Como Γ es discreto podemos tomar $R > 0$ de manera que:

$$\overline{B(o,R)} \cap \overline{B(\gamma o,R)} = \emptyset \ \text{ si } \gamma \in \Gamma \setminus \{id\}.$$

Consideremos ahora $0 < r < R$, en lo que sigue trabajaremos con

$$E = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \overline{B(\gamma.o,R)}, \ \text{ y } F = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \overline{B(\gamma.o,r)}.$$

Proposición 6.2. E^c y F son conjuntos recurrentes, esto es, si $(X_t)_{t\geq 0}$ es un Movimiento Browniano en $\mathbb{H}$ entonces para todo $z \in \mathbb{H}$

$$\mathbb{P}_z(X_t \in E^c \text{ para algún } t \geq 0) = \mathbb{P}_z(X_t \in F \text{ para algún } t \geq 0) = 1 \qquad (6.1.1)$$

Demostración. Pongamos $A = E^c$ o F y consideremos la función

$$h_A(z) = \mathbb{P}_z(X_t \in A \text{ para algún } t \geq 0).$$

Llamemos $S = \mathbb{H}/\Gamma$, esta es una superficie de Riemann compacta. Como A es Γ-invariante, la función h_A baja a S y define $h : S \to [0, 1]$.

Por un lado $h = 1$ en $\pi(A)$ y $\lim_{z\to\partial\pi(A)} h(z) = 1$. Por otro lado h_A es armónica en A^c (ver Lema 5.21), y entonces h es armónica en $S \setminus \pi(A)^c$. Como S es compacta tiene que ser $h = 1$.

□

Definimos tiempos de parada auxiliares de la siguiente forma:

$$s_0 = \min\{t \geq 0 : X_t \in \partial E\},$$

$$e_{n+1} = \min\{t > s_n : X_t \in F\},$$

$$s_{n+1} = \min\{t > e_n : X_t \in \partial E\}.$$

Lema 6.3. $s_n, e_n < +\infty$ casi seguramente, para todo n.

Demostración. Usamos la Proposición 6.2 y la propiedad de Markov fuerte (ver Proposición 5.8).

□

El problema con estos tiempos de parada es que no controlamos la distribución de $X_{s_{n+1}}$ dado X_{e_n}, es importante en este punto que esta distribución sea "uniforme". Para obtener este control, aplicamos un procedimiento denominado "aceptación-rechazo"[1].

Observación 6.4. Sean $0 < r < R$ y E como antes, por el corolario 5.22 existe $C > 0$ tal que

$$\frac{1}{C} \leq \frac{d\beta_{z,E}}{d\beta_{w,E}}(u) \leq C,$$

para todos $z, w \in \overline{B(\gamma.o, r)}$ y $u \in \partial B(\gamma.o, R)$, donde $\gamma \in \Gamma$ es cualquiera.

Ahora consideremos $(U_n)_n$ sucesión i.i.d. de variables aleatorias uniformes en $[0, 1]$, independientes de $(X_t)_{t\geq 0}$. Llamemos $\gamma_n \in \Gamma$ al elemento que satisface $X_{e_n} \in \partial B(\gamma_n.o, r)$.

[1] `https://en.wikipedia.org/wiki/Rejection_sampling`

Lema 6.5. Condicionado a X_{e_n} y al evento $U_n \leq \frac{1}{C}\frac{d\beta_{\gamma_n o,E}}{d\beta_{X_{e_n},E}}(X_{s_n})$, la distribución de X_{s_n} es uniforme. Precisamente

$$\mathbb{P}\left(X_{s_n} \in A \mid U_n \leq \frac{1}{C}\frac{d\beta_{\gamma_n o,E}}{d\beta_{X_{e_n},E}}(X_{s_n}),\ X_{e_n}\right) = \beta_{\gamma_n o,\partial B(\gamma_n o,R)}(A).$$

Demostración.

$$\mathbb{P}\left(X_{s_n} \in A \mid U_n \leq \frac{1}{C}\frac{d\beta_{\gamma_n o,E}}{d\beta_{X_{e_n},E}}(X_{s_n}),\ X_{e_n}\right) =$$

$$= \frac{\mathbb{P}\left(X_{s_n} \in A,\ U_n \leq \frac{1}{C}\frac{d\beta_{\gamma_n o,E}}{d\beta_{X_{e_n},E}}(X_{s_n}) \mid X_{e_n}\right)}{\mathbb{P}\left(U_n \leq \frac{1}{C}\frac{d\beta_{\gamma_n o,E}}{d\beta_{X_{e_n},E}}(X_{s_n}) \mid X_{e_n}\right)} =$$

$$= \frac{\int_A \mathbb{P}\left(U_n \leq \frac{1}{C}\frac{d\beta_{\gamma_n o,E}}{d\beta_{X_{e_n},E}}(z)\right) d\beta_{X_{e_n},E}(z)}{\int_E \mathbb{P}\left(U_n \leq \frac{1}{C}\frac{d\beta_{\gamma_n o,E}}{d\beta_{X_{e_n},E}}(z)\right) d\beta_{X_{e_n},E}(z)} =$$

$$= \frac{\int_A \frac{d\beta_{\gamma_n o,E}}{d\beta_{X_{e_n},E}}(z) d\beta_{X_{e_n},E}(z)}{\int_E \frac{d\beta_{\gamma_n o,E}}{d\beta_{X_{e_n},E}}(z) d\beta_{X_{e_n},E}(z)} = \beta_{\gamma_n o,E}(A).$$

□

Definimos entonces $P_n = \mathbb{1}_{\{U_n \leq \frac{1}{C}\frac{d\beta_{\gamma_n o,E}}{d\beta_{X_{e_n},E}}(X_{s_n})\}}$ y $K_n = \min\{k : \sum_{i=1}^k P_i = n\}$.

Definición 6.6. Los tiempos de parada $(\tau_n)_n$ buscados en el Lema 6.1 están dados por $\tau_0 = 0,\ \tau_n = s_{K_n}\ \forall n \geq 1$.

6.1.2. Ítems 1 y 2

Para ver que $\tau_n < +\infty$ basta ver que $K_n < +\infty$ pues ya sabemos (Lema 6.3) que $s_n < +\infty$ para todo n. Por un lado

$$\mathbb{P}(K_1 > h) = \mathbb{P}\Bigg(U_1 > \frac{1}{C}\frac{d\beta_{\gamma_2 o,E}}{d\beta_{X_{e_2},E}}(X_{s_2}), \ldots, U_{h-1} > \frac{1}{C}\frac{d\beta_{\gamma_{h-1} o,E}}{d\beta_{X_{e_{h-1}},E}}(X_{s_{h-1}}),$$

$$U_h \leq \frac{1}{C}\frac{d\beta_{\gamma_h o,E}}{d\beta_{X_{e_h},E}}(X_{s_h})\Bigg) \leq$$

$$\leq \mathbb{P}(U_1 > \frac{1}{C^2}, \ldots, U_{h-1} > \frac{1}{C^2}) \leq$$

$$\leq (1 - \frac{1}{C^2})^{h-1} \longrightarrow 0,\ \text{con } h \to +\infty.$$

Por tanto, $K_1 < +\infty$. Pero el mismo argumento concluye

$$\mathbb{P}(K_{n+1} > h + K_n \mid K_n) \leq (1 - \frac{1}{C^2})^{h-1},$$

luego, por inducción obtenemos $K_n < +\infty$ para todo n.

Para el ítem 2, notemos que por la continuidad de las trayectorias del Movimiento Browniano y por definición de los tiempos de parada

$$X_{\tau_n} \in \partial E = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \partial B(\gamma o, R)$$

Luego para cada n existe c.s. $\gamma_n \in \Gamma$ tal que

$$d(\gamma_n o, X_{\tau_n}) = R.$$

6.1.3. Ítem 3

Como consecuencia del Lema 6.5 tenemos:

Corolario 6.7. $\mathbb{P}(X_{\tau_n} \in A \mid \gamma_{K_n}) = \beta_{\gamma_{K_n} o, E}(A)$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{\tau_n} \in A \mid \gamma_{K_n}) &= \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{X_{\tau_n} \in A\}} \mid \gamma_{K_n}) = \\
&= \mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{X_{\tau_n} \in A\}} \mid K_n, X_{e_{K_n}}) \mid \gamma_{K_n}) = \\
&= \mathbb{E}(\beta_{\gamma_{K_n} o, E}(A) \mid \gamma_{K_n}) = \\
&= \beta_{\gamma_{K_n} o, E}(A).
\end{aligned}$$

□

Definimos $g_n = \gamma_{K_{n-1}}^{-1} \gamma_{K_n}$ para todo $n \geq 1$, donde $\gamma_0 = id$. Tenemos que

$$\mathbb{P}(g_n = g) = \mathbb{P}(\gamma_{K_{n-1}}^{-1} X_{\tau_n} \in \partial B(g.o, R)), \text{ para todo } g \in \Gamma.$$

Consideremos entonces el proceso $(Y_t)_{t \geq 0}$ dado por $Y_t = \gamma_{K_{n-1}}^{-1} X_{\tau_{n-1}+t}$. Este proceso es un Movimiento Browniano en $\mathbb{H}$, independiente de $(U_n)_n$. Por tanto

$$Y_{\tau_1'} \text{ y } \gamma_{K_{n-1}}^{-1} X_{\tau_n}, \text{ tienen la misma distribución,}$$

donde τ_1' se define igual que τ_1 pero con el proceso $(Y_t)_{t \geq 0}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(g_n = g) = \ &\mathbb{P}(Y_{\tau_1'} \in \partial B(g.o, R)) = \\
= &\int_{\partial B(o,R)} \mathbb{P}(Y_{\tau_1'} \in \partial B(g.o, R) \mid Y_0 = y) d\mu_0(y),
\end{aligned}$$

donde μ_0 es la distribución de Y_0. Como el Corolario 6.7 implica que esta distribución es exactamente $\beta_{o,\partial B(o,R)}$, concluimos

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(g_n = g) = \\
&= \int_{\partial B(o,R)} \mathbb{P}(Y_{\tau_1'} \in \partial B(g.o, R) \mid Y_0 = y) d\beta_{o,\partial B(o,R)}(y) = \\
&= \int_{\partial B(o,R)} \mathbb{P}(X_{\tau_1} \in \partial B(g.o, R) \mid X_0 = x) d\beta_{o,\partial B(o,R)}(x) = \\
&= \mathbb{P}(g_1 = g).
\end{aligned}$$

Este argumento muestra además que la distribución de g_n sólo depende del proceso entre tiempos $\tau_{K_{n-1}}$ y τ_{K_n}, por tanto se consigue también la independencia entre g_n y g_m siempre que $n \neq m$.

6.1.4. Ítem 4

Vamos a ver que el tiempo de parada τ_1 tiene momento exponencial. Esto es,

$$\text{Existe } \varepsilon > 0 \text{ tal que } \mathbb{E}(\exp(\varepsilon\tau_1)) < +\infty. \tag{6.1.2}$$

Para esto, basta ver que $\tau_1 - s_0$ y s_0 tienen momento exponencial. A modo de introducción a la prueba, supongamos que $\tau_1 = s_1$. En este caso, $s_1 - s_0 = (s_1 - e_1) + (e_1 - s_0)$, ahora dado X_{s_0}

$$e_1 - s_0 \sim \tau_F := \min\{t \geq 0 : X_t \in F\},$$

de manera similar, dado X_{e_1}

$$s_1 - e_1 \sim \eta_E := \{t \geq 0 : X_t \in \partial E\}.$$

Por tanto, el primer paso es probar los tiempos de parada a la derecha tienen momento exponencial uniforme, es decir, que el exponente no depende de dónde comience el proceso. El paso final consiste en probar que no se pierde el momento exponencial mediante el proceso de "aceptación-rechazo".

Teorema 6.8. Fijemos $o \in \mathbb{H}$, $0 < r < R$. Dado Γ cocompacto tomemos

$$E = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \overline{B(\gamma.o, R)}, \text{ y } F = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \overline{B(\gamma.o, r)}.$$

Entonces

1. Existe $\delta > 0$ tal que si $\eta_E = \min\{t \geq 0 : X_t \in \partial E\}$ entonces

$$\mathbb{E}_y(\exp(\delta\eta_E)) \leq K_1(\delta) < +\infty, \quad \forall y \in F.$$

2. Existe $\varepsilon > 0$ tal que si $\tau_F = \text{mín}\{t \geq 0 : X_t \in F\}$ entonces
$$\mathbb{E}_x(\exp(\varepsilon\tau_F)) \leq K_2(\varepsilon) < +\infty, \quad \forall x \in \partial E.$$

Será útil para la prueba de este teorema caracterizar el momento exponencial finito como decaimiento rapido de la cola de la distribución.

En ambos casos veremos que la cola de la distribución es 'subgeométrica', pues

Lema 6.9. Sea X v.a. no negativa. Entonces $\mathbb{P}(X \geq N) \leq C\theta^N$ para $C > 0$, $\theta \in (0,1)$ si y sólo si X tiene momento exponencial finito.

Demostración. Si X tiene momento exponencial finito el resultado es consecuencia de la desigualdad de Markov,
$$\mathbb{P}(X \geq N) \leq \frac{\mathbb{E}(\exp(\lambda X))}{\exp(\lambda N)}.$$

El recíproco es una consecuencia de la fórmula
$$\mathbb{E}(\exp(\lambda X)) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(\exp(\lambda X) > r)dr.$$

□

Demostración. ***1.:*** Por invariancia y el lema previo basta suponer $y \in \overline{B(o,r)}$, y ver que para algún $\theta \in (0,1)$
$$\mathbb{P}_y(\eta_{B(o,R)} > N) \leq \theta^N \quad \forall N \geq 1,$$

probamos esto por inducción en $N \geq 1$.

Consideremos $p : (0,+\infty) \times \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ el núcleo del calor en $\mathbb{H}$ (ver sección 5.1). Por definición del Movimiento Browniano en $\mathbb{H}$ (ver fórmula 5.2.1) tenemos,
$$\mathbb{P}_y(\eta_{B(o,R)} > 1) \leq \mathbb{P}_y(X_1 \in B(o,R)) =$$
$$= \int_{B(o,R)} p(1,y,z)dz.$$

Por el Teorema 5.1 el mapa $y \to \int_{B(o,R)} p(1,y,z)dz$ es continuo, además la Proposición 5.2 implica
$$\int_{B(o,R)} p(1,y,z)dz < 1, \quad \forall y \in \overline{B(o,R)}.$$

Por tanto existe $\theta \in (0,1)$ tal que
$$\mathbb{P}_y(\eta_{B(o,R)} > 1) \leq \int_{B(o,R)} p(1,y,z)dz \leq \theta \quad \forall y \in \overline{B(o,R)}. \tag{6.1.3}$$

Supongamos entonces

$$\mathbb{P}_y(\eta_{B(o,R)} > N) \leq \theta^N \quad \forall y \in \overline{B(o,r)}, \tag{6.1.4}$$

como tenemos

$$\mathbb{P}_y(\eta_{B(o,R)} > N+1) = \mathbb{P}_y(\eta_{B(o,R)} > N+1 \mid \eta_{B(o,R)} > N)\mathbb{P}_y(\eta_{B(o,R)} > N),$$

por 6.1.4 basta ver que

$$\mathbb{P}_y(\eta_{B(o,R)} > N+1 \mid \eta_{B(o,R)} > N) \leq \theta \ \text{ para todo } y \in \overline{B(o,r)}.$$

Esto es consecuencia de 6.1.3 y de la propiedad de Markov:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_y(\eta_{B(o,R)} > N+1 \mid \eta_{B(o,R)} > N) = \\
&= \mathbb{E}_y\Big(\mathbb{1}_{\{\eta_{B(o,R)} > N+1\}} \mid \eta_{B(o,R)} > N\Big) = \\
&= \mathbb{E}_y\Big(\mathbb{1}_{\{X_t \in B(o,R):\ t \in [0,N+1]\}} \mid \eta_{B(o,R)} > N\Big) = \\
&= \mathbb{E}_y\Big(\mathbb{1}_{\{X_t \in B(o,R):\ t \in [0,1]\}} \cdots \mathbb{1}_{\{X_t \in B(o,R):\ t \in [N,N+1]\}} \mid \eta_{B(o,R)} > N\Big) \\
&= \mathbb{E}_y\Big(\mathbb{1}_{\{X_t \in B(o,R):\ t \in [N,N+1]\}} \mid \eta_{B(o,R)} > N\Big) = \\
&= \mathbb{E}_y\Big(\mathbb{1}_{\{X_{t+N} \in B(o,R):\ t \in [0,1]\}} \mid \eta_{B(o,R)} > N\Big) = \\
&= \mathbb{E}_y\Big(\mathbb{E}_y\big(\mathbb{1}_{\{X_{t+N} \in B(o,R):\ t \in [0,1]\}} \mid X_N\big) \mid \eta_{B(o,R)} > N\Big) = \\
&= \mathbb{E}_y\Big(\mathbb{E}_{X_N}\big(\mathbb{1}_{\{X_t \in B(o,R):\ t \in [0,1]\}}\big) \mid \eta_{B(o,R)} > N\Big) = \\
&= \mathbb{E}_y\Big(\mathbb{P}_{X_N}\big(\eta_{B(o,R)} > 1\big) \mid \eta_{B(o,R)} > N\Big) \leq \theta.
\end{aligned}$$

□

2.: Esta parte es más delicada, la idea es trabajar en el cociente, y aquí la compacidad es de particular importancia para la prueba.

Fijemos $x \in \partial E$, llamemos $p = \pi(x)$ y $A = \pi(F)$. Por la Proposición 5.26 el proceso $(M_t)_{t \geq 0}$ dado por $M_t = \pi(X_t)$ es un Movimiento Browniano en $\mathbb{H}/\Gamma$ (ver Sección 5.8 y en particular el Teorema 5.25).

La fórmula (5.8.3) implica que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_x(\tau_F > N) &= \mathbb{P}_x(X_t \notin F,\ \forall t \in [0,N]) = \\
&= \mathbb{P}_p(M_t \notin A,\ \forall t \in [0,N]).
\end{aligned}$$

Pongamos $a_N = \mathbb{P}_p(M_t \notin A,\ \forall t \in [0, N])$. El objetivo es probar que existe $\theta \in (0, 1)$ tal que

$$\frac{a_{N+1}}{a_N} \leq \theta < 1, \text{ para todo } N \geq 1. \tag{6.1.5}$$

Pues con esto resulta

$$\mathbb{P}_x(\tau_E > N + 1) = a_{N+1} = \frac{a_{N+1}}{a_N}\frac{a_N}{a_{N-1}} \dots \frac{a_1}{a_0} a_0 \leq \theta^{N+1},$$

que es lo que buscamos (ver Lema 6.9).

Para probar (6.1.5) notemos primero que

$$\frac{a_{N+1}}{a_N} = \mathbb{P}_p(M_t \notin A,\ \forall t \in [0, N + 1] \mid M_t \notin A,\ \forall t \in [0, N]). \tag{6.1.6}$$

Entonces para empezar tomemos la medida dada por $\mu_N^p(U) = \mathbb{P}_p(M_N \in U \mid M_t \notin A\ \forall t \in [0, N])$, esto es, μ_N^p es la distribución de M_N condicionado a que $(M_t)_{t\geq 0}$ no entró en A entre $[0, N]$. Obtenemos así

$$\frac{a_{N+1}}{a_N} = \int_{\mathbb{H}/\Gamma} \mathbb{P}_p(M_t \notin A\ \forall t \in [N, N + 1] \mid M_N = q) d\mu_N^p(q) =$$

$$= \int_{\mathbb{H}/\Gamma} \mathbb{P}_q(M_t \notin A\ \forall t \in [0, 1]) d\mu_N^p(q),$$

donde la última igualdad es consecuencia de la propiedad de Markov.

Para lidiar con el integrando primero observamos que

$$\mathbb{P}_q(M_t \notin A,\ \forall t \in [0, 1]) \leq \mathbb{P}_q(M_t \notin A)\ \ \forall t \in [0, 1], \tag{6.1.7}$$

Por otro lado sabemos que (ver Teorema 5.25)

$$\mathbb{P}_q(M_t \notin A) = \int_{A^c} p_\Gamma(t, q, u) du,$$

y por tanto fijado $t \in (0, 1)$ tenemos $\mathbb{P}_q(M_t \notin A) < 1$ para todo $q \in \mathbb{H}/\Gamma$, ya que de lo contrario

$$1 = \int_{A^c} p_\Gamma(t, q, u) du, \text{ para algún } q \in \mathbb{H}/\Gamma$$

lo que implica $p_\Gamma(t, q, u) = 0$ para todo $u \in A$, que es absurdo por la positividad de p_Γ (ver Teorema 5.24).

Como el mapa $q \to \mathbb{P}_q(M_t \notin A)$ es continuo y $\mathbb{H}/\Gamma$ es compacta, existe $0 < \theta < 1$ tal que

$$\mathbb{P}_q(M_{\frac{1}{2}} \notin A) \leq \theta \text{ para todo } q \in \mathbb{H}/\Gamma.$$

Concluimos entonces

$$\frac{a_{N+1}}{a_N} \leq \int_{\mathbb{H}/\Gamma} \mathbb{P}_q(M_{\frac{1}{2}} \notin A) d\mu_N^p(q) \leq \theta \mu_N^p(\mathbb{H}/\Gamma) = \theta < 1.$$

□

⋆ s_0 **tiene momento exponencial**

Esto es consecuencia del ítem 1 en el teorema 6.8. □

⋆ $\tau_1 - s_0$ **tiene momento exponencial**

De la definición se desprende que

$$\mathbb{E}(\exp(\varepsilon(\tau_1 - s_0)) =$$

$$= \mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \exp(\varepsilon(s_1\text{-}s_0)) \dots \exp(\varepsilon(s_{n+1}\text{-}s_n))\mathbb{1}_{\{P_1=0,\dots,P_n=0,P_{n+1}=1\}}\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}\Bigg(\exp(\varepsilon(s_1\text{-}s_0)) \dots \exp(\varepsilon(s_{n+1}\text{-}s_n)\mathbb{1}_{\{P_1=0,\dots,P_n=0,P_{n+1}=1\}}\Bigg) =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}\Bigg(\exp(\varepsilon(s_1\text{-}s_0))\mathbb{1}_{\{P_1=0\}} \dots \exp(\varepsilon(s_n\text{-}s_{n-1}))\mathbb{1}_{\{P_n=0\}} \exp(\varepsilon(s_{n+1}\text{-}s_n))\mathbb{1}_{\{P_{n+1}=1\}}\Bigg).$$

Consideremos la σ-álgebra $\mathcal{F}_n = \sigma(\{X_t : t \leq s_n\}, P_1, \dots, P_n))$, llamemos también

$$W_n = \exp(\varepsilon(s_1 - s_0))\mathbb{1}_{\{P_1=0\}} \dots \exp(\varepsilon(s_n - s_{n-1}))\mathbb{1}_{\{P_n=0\}}.$$

Condicionando a $\mathcal{F}_n$ obtenemos

$$\mathbb{E}(W_n \exp(\varepsilon(s_{n+1} - s_n))\mathbb{1}_{\{P_{n+1}=1\}}) =$$

$$= \mathbb{E}\Bigg(\mathbb{E}(W_n \exp(\varepsilon(s_{n+1} - s_n))\mathbb{1}_{\{P_{n+1}=1\}} \mid \mathcal{F}_n)\Bigg) =$$

$$= \mathbb{E}\Bigg(W_n\mathbb{E}(\exp(\varepsilon(s_{n+1} - s_n))\mathbb{1}_{\{P_{n+1}=1\}} \mid \mathcal{F}_n)\Bigg).$$

Lidiamos con el término a la derecha de W_n:

$$\mathbb{E}\Bigg(\exp(\varepsilon(s_{n+1} - s_n))\mathbb{1}_{\{P_{n+1}=1\}} \mid \mathcal{F}_n\Bigg) \leq$$

$$\leq \mathbb{E}\Bigg(\exp(2\varepsilon(s_{n+1} - s_n)) \mid \mathcal{F}_n\Bigg)^{1/2} \mathbb{P}(P_{n+1} = 1 \mid \mathcal{F}_n))^{1/2} \leq$$

$$\leq \mathbb{E}\Bigg(\exp(2\varepsilon(s_{n+1} - s_n)) \mid \mathcal{F}_n\Bigg)^{1/2}.$$

Queremos acotar uniformemente con n esta última expresión. Primero, si m_n es la distribución de X_{s_n} tenemos

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(\exp(\varepsilon(s_{n+1}-s_n)) \mid \mathcal{F}_n) = \\
&= \int_{\partial E} \mathbb{E}(\exp(\varepsilon(s_{n+1}-s_n)) \mid X_{s_n}=x)dm_n(x) = \\
&= \int_{\partial E} \mathbb{E}(\exp(\varepsilon((s_{n+1}-e_{n+1})+(e_{n+1}-s_n)))) \mid X_{s_n}=x)dm_n(x) \leq \\
&\leq \int_{\partial E} \mathbb{E}(\exp(2\varepsilon(s_{n+1}-e_{n+1}) \mid X_{s_n}=x)^{1/2} \\
&\qquad\qquad \mathbb{E}(\exp(2\varepsilon(e_{n+1}-s_n)) \mid X_{s_n}=x)^{1/2}dm_n(x).
\end{aligned}$$

Por el teorema 6.8 para $\varepsilon > 0$ suficientemente chico,

$$\mathbb{E}(\exp(2\varepsilon(e_{n+1}-s_n)) \mid X_{s_n}=x) = \mathbb{E}_x(\exp(2\varepsilon\tau_E)) \leq K_2(2\epsilon) < +\infty,$$

además

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(\exp(2\varepsilon(s_{n+1}-e_{n+1})) \mid X_{s_n}=x) = \\
&= \int_F \mathbb{E}(\exp(2\varepsilon(e_{n+1}-s_n)) \mid X_{s_n}=x, X_{e_{n+1}}=z)dl_n(z) = \\
&= \int_F \mathbb{E}_z(\exp(2\varepsilon\eta_F))dl_n(z)
\end{aligned}$$

Luego haciendo $\varepsilon > 0$ más chico si hace falta, por el Teorema 6.8

$$\mathbb{E}(\exp(2\varepsilon(s_{n+1}-e_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n) = K_1(2\varepsilon) < +\infty.$$

Poniendo $K = K_1K_2$ llegamos a

$$\mathbb{E}(W_n \exp(\varepsilon(s_{n+1}-s_n))\mathbb{1}_{\{P_{n+1}=1\}}) \leq \mathbb{E}(W_n)K(2\varepsilon)^{1/2}.$$

Aplicando el mismo argumento primero con $\mathcal{F}_{n-1}$, luego con $\mathcal{F}_{n-2}$ y así ($\mathcal{F}_0 := \sigma(\{X_t : t \leq s_0\})$) y usando que $\mathbb{P}(P_k = 0) \leq \frac{1}{C^2}$ para todo k, obtenemos:

$$\mathbb{E}(W_n) \leq \mathbb{E}(W_{n-1})K(2\varepsilon)^{1/2}\frac{1}{C^2} \leq \tag{6.1.8}$$

$$\leq \mathbb{E}(W_{n-2})K(2\varepsilon)\left(\frac{1}{C^2}\right)^2 \leq \tag{6.1.9}$$

$$\leq \cdots \leq K(2\varepsilon)^{n/2}\left(\frac{1}{C^2}\right)^n. \tag{6.1.10}$$

Concluyendo, notar que por convergencia dominada $K(\varepsilon) \to 1$ cuando $\varepsilon \to 0$. Por lo que si $\varepsilon > 0$ es tal que $K(2\varepsilon)^{1/2} < C^2$,

$$\mathbb{E}(\exp(\varepsilon(\tau_1 - s_0)) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} K(2\varepsilon)^{n/2} \left(\frac{1}{C^2}\right)^n < +\infty.$$

$\square$

Capítulo 7

Demostración del Teorema 4.1

Estamos ahora en condiciones de probar el teorema principal de este trabajo, el Teorema 4.1. Nos dedicamos exclusivamente a esto en el resto del capítulo.

Consideremos los tiempos de parada $(\tau_n)_n$ y la sucesión $(\gamma_n)_n$ elementos de Γ dados por el lema 6.1. Por el ítem 3 de dicho lema sabemos que

$$\gamma_n = g_1 \dots g_n \text{ y la sucesión } (g_n)_{n\geq 1} \text{ es i.i.d.}$$

La probabilidad μ del Teorema 4.1 es

$$\mu(g) = \mathbb{P}(g_1 = g), \text{ para todo } \gamma \in \Gamma.$$

$\star$ **La medida visual ν_o es μ-estacionaria.**

Para ver esto llamemos $z_n = \gamma_n.o$, entonces la segunda condición del Lema 6.1 es

$$d(X_{\tau_n}, z_n) = d(X_{\tau_n}, \gamma_n.o) \leq R, \text{ para todo } n \geq 1 \text{ c.s.}$$

Por otro lado $\tau_n \to +\infty$ cuando $n \to +\infty$. Por tanto existe $z_\infty = \lim_n z_n$ y su distribución es ν_o, esto es

$$\mathbb{P}(z_\infty \in A) = \mathbb{P}_o(\lim_{t\to+\infty} X_t \in A) = \nu_o(A) \text{ para todo } A \subset S^1 \text{ boreliano.}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\mu * \nu_o(A) = \sum_g (g_*\nu_o)(A)\mu(g) = \\
&= \sum_g \nu_o(g^{-1}A)\mu(g) \\
&= \sum_g \mathbb{P}(z_\infty \in g^{-1}A)\mathbb{P}(g_1 = g) = \\
&= \sum_g \mathbb{P}(g.z_\infty \in A)\mathbb{P}(g_1 = g) = \\
&= \sum_g \mathbb{P}(\lim_n gg_1 \dots g_n.o \in A \mid \gamma_1 = \gamma)\mathbb{P}(g_1 = g)
\end{aligned}$$

Por otro lado $g_1 \dots g_n.o$ y $g_2 \dots g_{n+1}.o$ tienen la misma distribución, luego

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\lim_n gg_1 \dots g_n \in A) &= \mathbb{P}(\lim_n gg_2 \dots g_{n+1}.o \in A) = \\
&= \mathbb{P}(\lim_n g_1 \dots g_n.o \in A \mid g_1 = g) = \\
&= \mathbb{P}(z_\infty \in A \mid g_1 = g).
\end{aligned}$$

Con esto y la cuenta anterior resulta

$$\mu * \nu_o(A) = \nu_o(A), \text{ es decir, } \nu_o \text{ es } \mu\text{-estacionaria}$$

□

⋆ **Momento exponencial de μ.**

Para finalizar la demostración del Teorema 4.1 debemos probar que μ tiene momento exponencial finito, esto es: existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\sum_\gamma \exp(\varepsilon \operatorname{dist}(o, \gamma.o))\mu(\gamma) < +\infty.$$

Otra vez por la segunda condición del Lema 6.1 obtenemos:

$$\begin{aligned}
\sum_\gamma \exp(\varepsilon \operatorname{dist}(o, \gamma.o))\mu(\gamma) &\leq \mathbb{E}[\exp(\varepsilon \operatorname{dist}(o, X_{\tau_1}) + R)] \leq \\
&\leq \exp(\varepsilon R)\mathbb{E}[\exp(\varepsilon \operatorname{dist}(o, X_{\tau_1}))].
\end{aligned}$$

La cuarta condición del Lema 6.1 es que τ_1 tiene momento exponencial finito. Entonces para terminar basta probar el siguiente resultado (notar que es un resultado técnico sobre el Movimiento Browniano en $\mathbb{H}$):

Teorema 7.1. Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un Movimiento Browniano en $\mathbb{H}$ y τ un tiempo de parada con momento exponencial finito. Entonces $\operatorname{dist}(X_0, X_\tau)$ tiene momento exponencial finito.

Demostración. Suponemos sin pérdida de generalidad que c.s. $X_0 = o$. Recordamos que queremos encontrar $\varepsilon > 0$ tal que

$$\mathbb{E}\left(\exp(\varepsilon \operatorname{dist}(o, X_\tau))\right) < +\infty.$$

Pongamos $N = \lceil \tau \rceil$. Es claro que N también tiene momento exponencial finito. Por el Lema 6.9 podemos tomar $\theta \in (0,1)$ y $C' > 0$ tal que

$$\mathbb{P}(N \geq n) \leq C'\theta^n \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Ahora

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big(\exp(\varepsilon \operatorname{dist}(o, X_\tau))\big) &\leq \mathbb{E}\big(\exp(\varepsilon \text{diám}\{X_t : t \in [0,N]\})\big) = \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}\big(\exp(\varepsilon \text{diám}\{X_t : t \in [0,n]\})\mathbb{1}_{\{N=n\}}\big) \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}\big(\exp(2\varepsilon \text{diám}\{X_t : t \in [0,n]\}\big)^{1/2}\, \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{N=n\}}\right)^{1/2},\end{aligned}$$

donde para la última desigualdad aplicamos Cauchy-Schwarz.

Notemos ahora que

$$\text{diám}\{X_t : t \in [0,n]\}] \leq \text{diám}\{X_t : t \in [0,1]\} + \cdots + \text{diám}\{X_t : t \in [n-1,n]\},$$

además las variables aleatorias $\text{diám}\{X_t : t \in [i-1,i]\}$ para $i = 1, \ldots, n$ son independientes e idénticamente distribuidas, esto debido a la propiedad de Markov. Por tanto

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big(\exp(\varepsilon \operatorname{dist}(o, X_\tau))\big) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}\big(\exp(2\varepsilon \text{diám}\{X_t : t \in [0,1]\}\big)^{n/2}\, \mathbb{P}(N=n)^{1/2} \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}\big(\exp(2\varepsilon \text{diám}\{X_t : t \in [0,1]\}\big)^{n/2}\, \mathbb{P}(N \geq n)^{1/2} \leq \\ &\leq C' \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}\big(\exp(2\varepsilon \text{diám}\{X_t : t \in [0,1]\}\big)^{n/2} \theta^{n/2}.\end{aligned}$$

Por la Proposición 5.13 existe $\delta > 0$ tal que

$$\mathbb{E}[\exp(\delta \text{diám}\{X_t : t \in [0,1]\}] < +\infty,$$

de donde, por convergencia dominada podemos tomar $0 < \varepsilon < \delta/2$ tal que

$$\theta\, \mathbb{E}[\exp(2\varepsilon \text{diám}\{X_t : t \in [0,1]\}] < 1,$$

finalmente se concluye

$$\mathbb{E}[\exp(\varepsilon\, \mathrm{dist}(o, X_\tau))] < +\infty.$$

□

Apéndice A

Probabilidad

A.1. Esperanza condicional

Definimos la esperanza condicionada a una sub σ-álgebra y enunciamos algunas propiedades elementales, referimos a [Var01] capítulo 4 por más detalles y las pruebas respectivas.

Fijemos un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathbb{P}, \mathcal{F})$,

Definición A.1. Dada una sub σ-álgebra $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ y una variable aleatoria integrable X definimos la esperanza de X condicionada a $\mathcal{G}$ como

$$\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) \text{ v.a. } \mathcal{G}\text{-medible tal que } \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_A \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})\right) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A X) \text{ para todo } A \in \mathcal{G}.$$

La existencia y unicidad es ctp, y se obtiene como consecuencia del Teorema de Radon-Nikodym.

Algunas propiedades que usaremos en este trabajo son:

Proposición A.2.

1. Si X es $\mathcal{G}$-medible $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) = X$.
2. $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})) = \mathbb{E}(X)$.
3. $\mathbb{E}(\lambda X + Y \mid \mathcal{G}) = \lambda \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) + \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{G})$.
4. Si H es acotada y $\mathcal{G}$ medible, $\mathbb{E}(HX \mid \mathcal{G}) = H\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$.
5. Si $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$, $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}_1) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}_2) \mid \mathcal{G}_1)$.
6. Si ϕ es una función convexa, $\mathbb{E}(\phi(X) \mid \mathcal{G}) \geq \phi(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}))$.

A.2. Procesos estocásticos

Fijemos un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathbb{P}, \mathcal{F})$, y S un espacio polaco (metrizable con base numerable).

Definición A.3.

- Un proceso estocástico a tiempo continuo en S es $(X_t)_{t\geq 0}$ tal que $X_t : \Omega \to S$ es medible para todo $t \geq 0$.
- Un proceso estocástico a tiempo discreto en S es $(X_n)_{n\geq 0}$ tal que $X_n : \Omega \to S$ es medible para todo $t \geq 0$.

Definición A.4. Un proceso estocástico $(X_t)_{t\geq 0}$ se dice continuo (cádlàg) si $t \to X_t$ es continuo (cádlàg) c.s.

Definición A.5.

Una filtración es $(\mathcal{F}_t)_n$ tal que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ para todos $s \leq t$.

Decimos que un proceso $(X_t)_{t\geq 0}$ está adaptado a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si X_t es $\mathcal{F}_t$-medible para todo $t \geq 0$.

Un proceso $X = (X_t)_{t\geq 0}$ induce una filtración natural que denotamos por $(\mathcal{F}_t^X)_{t\geq 0} = \sigma(X_s : 0 \leq s \leq t)$. Todo proceso está adaptado a su filtración natural.

Las definiciones en el caso discreto son análogas.

A.3. Martingalas

A.3.1. Tiempo discreto

Comenzamos introduciendo martingalas en tiempo discreto. Referencias para esta sección son [BEK04] y [Wil91].

Fijemos $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, en esta sección trabajaremos con procesos a tiempo discreto $(X_n)_n$, i.e., cada $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ es medible.

Definición A.6. Si $(X_n)_n$ es un proceso adaptado a una filtración $(\mathcal{F}_n)_n$, y X_n es integrable para todo $n \geq 0$, decimos que

- $(X_n)_n$ es un martingala si $\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = X_n$
- $(X_n)_n$ es un submartingala si $\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) \geq X_n$
- $(X_n)_n$ es un supermartingala si $\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) \leq X_n$

Ejemplo A.7.

1. Dada $X \in L^1(\Omega, \mathbb{P})$ y una filtración $(\mathcal{F}_n)_n$, el proceso dado por $X_n = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F})$ es una martingala.

2. Sea $(Z_n)_n$, consideramos $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_0, \ldots, Z_n)$. Si tenemos

   - Z_n integrable para todo $n \geq 0$,
   - Z_n centrada, i.e., $\mathbb{E}(Z_n) = 0$, y
   - $\mathbb{E}(Z_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = 0$ para todo $n \geq 1$

   Entonces el proceso dado por $X_n = \sum_{k=0}^n Z_k$ es una martingala.

3. Sea $(Z_n)_n$, consideramos $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_0, \ldots, Z_n)$. Si tenemos

   - $(Z_n)_{n\geq}$ independiente
   - $Z_0 = 0$, y $Z_n \geq 0$ para todo $n \geq 1$.
   - $\mathbb{E}(Z_k) = 1$ para todo $n \geq 1$.

   Entonces el proceso dado por $X_0 = 1$, $X_n = Z_1 \ldots Z_n$ es una martingala.

Resumimos en la siguiente proposición algunas propiedades claves.

Proposición A.8. Sea $(X_n)_n$ una martingala respecto de la filtración $(\mathcal{F}_n)_n$.

1. $\mathbb{E}(X_{n+k} \mid \mathcal{F}_n) = X_n$ para todos $n, k \geq 0$.
2. $\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_0)$ para todo $n \geq 0$.
3. Si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función convexa, y $\varphi(X_n)$ es integrable, el proceso $(\varphi(X_n))_n$ es una submartingala.

Demostración.

1. Dado $n \geq 0$, hacemos inducción en k.

   - $k = 0$: $\mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_n) = X_n \mathbb{E}(1 \mid \mathcal{F}_n) = X_n$.
   - $\mathbb{E}(X_{n+k+1} \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_{n+k+1} \mid \mathcal{F}_{n+k}) \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(X_{n+k} \mid \mathcal{F}_n) = X_n$.

2. $$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_0)) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) \mid \mathcal{F}_0)) = \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_{n-1} \mid \mathcal{F}_0)) = \mathbb{E}(X_0).\end{aligned}$$

3. $\mathbb{E}(\varphi(X_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n) \geq \varphi(\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = \varphi(X_n)$, donde aplicamos la desigualdad de Jensen para esperanzas condicionales.

□

Teorema A.9 (Desigualdad de Doob)**.** Si $(X_n)_n$ es una submartingala positiva, tenemos

$$\mathbb{E}\left(\left(\sup_{0 \leq j \leq n} X_j\right)^2\right) \leq 4\mathbb{E}(X_n^2)$$

Demostración. Ver Corolario 5.3 en [Var01]. □

Exponemos ahora algunos teoremas de convergencia de martingalas.

Teorema A.10. Sea $(X_n)_n$ una martingala tal que $X_n \in L^2(\Omega, \mathbb{P})$ para todo $n \geq 0$.

1. Los incrementos $\Delta_n X = X_n - X_{n-1}$ son ortogonales en $L^2(\Omega, \mathbb{P})$:
$$\mathbb{E}(\Delta_n X \Delta_m X) = 0 \quad \text{para } n \neq m.$$

2. Si $(X_n)_n$ es acotada en $L^2(\Omega, \mathbb{P})$, esto es: $\sup_n \mathbb{E}(X_n^2) < +\infty$, entonces
$$\lim_n X_n = X_\infty \text{ en } L^2(\Omega, \mathbb{P}) \text{ y casi seguramente.}$$

3. Si se tiene que $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}\mathbb{E}((\Delta_n X)^2) < +\infty$, entonces
$$\lim_n \frac{X_n}{n} = 0 \quad \text{casi seguramente.}$$

Demostración.

1. Sean $n \neq m$, supongamos $n < m$. Resulta entonce que Δ_n es $\mathcal{F}_{m-1}$-medible y por tanto:
$$\mathbb{E}(\Delta_n X \Delta_m X) = \mathbb{E}(\Delta_n X \mathbb{E}(\Delta_m X \mid \mathcal{F}_{m-1})).$$
Pero por definición de martingala: $\mathbb{E}(\Delta_m X \mid \mathcal{F}_{m-1}) = 0$.

2. Notemos que $X_n = X_0 + \sum_{k=1}^{n} \Delta_n X$. Luego por el ítem anterior,
$$||X_m - X_n||_2^2 = \sum_{k=n}^{m} ||\Delta_k X||_2^2. \tag{A.3.1}$$
Si la serie de la derecha es convergente, $(X_n)_n$ es de Cauchy en $L^2(\Omega, \mathbb{P})$ y por tanto converge en $L^2(\Omega, \mathbb{P})$.

   Llamemos $C = \sup_n \mathbb{E}(X_n^2) < +\infty$, luego $||X_m - X_n||_2^2 \leq 4C^2$ para todos m, n. Entonces por A.3.1
$$\sum_{k=1}^{+\infty} ||\Delta_k X||_2^2 \leq 4C^2,$$
al ser ésta una serie de términos positivos, tiene que ser convergente.

   Para ver que $(X_n)_n$ converge casi seguramente, usamos la desigualdad de Doob A.9.
$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left((\sup_{i,j\geq n} |X_j - X_i|)^2\right) &\leq \mathbb{E}\left((\sup_{i\geq n} |X_i - X_n| + \sup_{i\geq n} |X_i - X_n|)^2\right) \leq \\ &\leq 2\mathbb{E}\left(\sup_{i\geq n} |X_i - X_n|)^2\right) = \\ &= 2 \lim_{N\to+\infty} \mathbb{E}\left((\sup_{N\geq i\geq n} |X_i - X_n|)^2\right) \leq \\ &\leq 8 \lim_{N\to+\infty} \mathbb{E}(|X_N - X_n|^2).\end{aligned}$$

Como $(X_n)_n$ converge en $L^2(\Omega, \mathbb{P})$ concluimos que

$$\mathbb{E}\left((\sup_{i,j\geq n} |X_j - X_i|)^2 \right) \to 0.$$

Por tanto, $(X_n)_n$ converge casi seguramente, el límite tiene que ser el mismo que el de la convergencia en $L^2(\Omega, \mathbb{P})$.

3. Para este resultado haremos uso del siguiente lema:

Lema A.11. (Kronecker) Sea $(x_n)_n$ una sucesión de números reales,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_k}{k} < +\infty \implies \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k = 0.$$

Prueba del lema. Llamemos $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{k}$ y notemos que $x_k = k(s_k - s_{k-1})$. Luego

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k(s_k - s_{k-1}) = \frac{1}{n}(ns_n - \sum_{k=1}^{n-1} s_k) = s_n - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k,$$

Pero como la sucesión s_n converge, su promedio converge al mismo valor, por tanto el último término converge a cero.

$\square$

Llamemos $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\Delta_k X$, por el ítem 1 y por hipótesis

$$\mathbb{E}(S_n^2) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\mathbb{E}((\Delta_k X)^2) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}\mathbb{E}((\Delta_k X)^2) < +\infty.$$

Denotemos $Z_k = \frac{1}{k}\Delta_k X$, luego

- $\mathbb{E}(|Z_k|) \leq \frac{1}{k}(\mathbb{E}(|X_k|) + \mathbb{E}(|X_{k-1}|)) < +\infty$,
- $\mathbb{E}(Z_k) = 0$, y
- $\mathbb{E}(Z_{k+1} \mid \mathcal{F}_k) = 0$,

por lo que S_n es una martingala (ver A.7). Por el ítem 2, S_n converge c.s., luego podemos aplicar el lema de Kronecker para concluir que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{X_n}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{X_n - X_0}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \Delta_k X = 0, \quad \text{casi seguramente.}$$

A.3.2. Tiempo continuo

Fijemos otra vez $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, ahora trabajaremos con procesos a tiempo continuo $(X_t)_{t\geq 0}$.

Definición A.12. Si $(X_t)_{t\geq 0}$ es un proceso adaptado a una filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, y X_t es integrable para todo $t \geq 0$, decimos que

- $(X_t)_{t\geq 0}$ es un martingala si $\mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) = X_s$ para todos $0 \leq s \leq t$.
- $(X_t)_{t\geq 0}$ es un submartingala si $\mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) \geq X_s$ para todos $0 \leq s \leq t$.
- $(X_t)_{t\geq 0}$ es un supermartingala si $\mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) \leq X_s$ para todos $0 \leq s \leq t$.

Algunos resultados clásicos que utilizamos en el trabajo son los siguientes.

Teorema A.13 (Teorema de parada opcional).
Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ una martingala continua y $\tau \geq 0$ tiempo de parada tal que $|X_{t\wedge\tau}| \leq X$ donde $\mathbb{E}(|X|) < +\infty$, entonces

$$\mathbb{E}(X_\tau \mid \mathcal{F}_0) = X_0, \text{ en particular } \mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(X_0).$$

Teorema A.14 (Desigualdad de Doob).
Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ una martingala continua y $1 \leq p < +\infty$, entonces

$$\text{para todo } \varepsilon > 0 \ \ \mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T} |X_t| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^p}\mathbb{E}\left(|X(T)|^p\right). \tag{A.3.2}$$

Demostración. Ver [Bor17] Capítulo 1 Corolario 5.2. □

Teorema A.15. Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ una martingala tal que $\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}\left(|X(t)|\right) < +\infty$. Entonces existe X_∞ tal que $\lim_{t\geq 0} X_t = X_\infty$, además $\mathbb{E}(|X_\infty|) < +\infty$.

Demostración. Ver [Bor17] Capítulo 1 Corolario 5.4. □

A.4. Movimiento Browniano en $\mathbb{R}^d$

Definición A.16. Un Movimiento Browniano en $\mathbb{R}$ es $(B_t)_{t\geq 0}$ tal que

1. Para todos $0 \leq t_0 \leq \cdots \leq t_d$ las variables aleatorias $B_{t_1} - B_{t_0}, \ldots, B_{t_d} - B_{t_{d-1}}$ son independientes.
2. $B_t - B_s \sim N(0, t-s)$ para todos $0 \leq s \leq t$.
3. $(B_t)_{t\geq 0}$ es continuo, esto es, $t \to B_t$ es continuo c.s.

Observación A.17. Una prueba de la existencia de dicho proceso se puede ver por ejemplo en [MP10] o [Bil68]. En ambos casos se construye primero lo que denominaremos Movimiento Browniano estándar que es el caso especial $B_0 = 0$ c.s. Dado un Movimiento Browniano estándar $(B_t)_{t\geq 0}$ y una variable aleatoria B cualquiera $(B_t + B)_{t\geq 0}$ resulta un Movimiento Browniano con $B_0 = B$.

Referimos a [Bor17], [MP10] por propiedades básicas de este proceso. En lo que sigue listamos algunas que serán de utilidad para este trabajo.

Proposición A.18. Si $(B_t)_{t\geq 0}$ es un Movimiento Browniano, $(-B_t)_{t\geq 0}$ también es un Movimiento Browniano.

Proposición A.19 (Ley fuerte de los grandes números)**.**

$$\text{Casi seguramente} \qquad \frac{B_t}{t} \xrightarrow{t\to+\infty} 0.$$

Recordemos que la filtración natural asociada a un proceso $B = (B_t)_{t\geq 0}$ es $(\mathcal{F}_t^B)_{t\geq 0}$ donde $\mathcal{F}_t^B = \sigma(B_u : u \in [0,t])$.

Proposición A.20 (Propiedad de Markov débil)**.**
Sea $(B_t)_{t\geq 0}$ un Movimiento Browniano, para todo $s \geq 0$ el proceso $(B_{t+s} - B_s)_{t\geq 0}$ es un Browniano estándar independiente de $\mathcal{F}_s^B$.

Proposición A.21 (Propiedad de Markov fuerte)**.**
Sea $(B_t)_{t\geq 0}$ un browniano y τ un tiempo de parada respecto de la filtración natural que es c.s. finito, entonces el proceso $(B_{\tau+t} - B_\tau)_{t\geq 0}$ es un browniano estándar independiente de $\mathcal{F}_\tau^B$.

Proposición A.22. Sea $(B_t)_{t\geq 0}$ un Movimiento Browniano tal que $\mathbb{E}(|B_0|) < +\infty$. Entonces $(B_t)_{t\geq 0}$ es una martingala respecto de la filtración natural.

Definición A.23 (Browniano en $\mathbb{R}^d$)**.**
Un Movimiento Browniano en $\mathbb{R}^d$ es $(B_t)_{t\geq 0}$ tal que $B_t = (B_t^1, \ldots, B_t^d)$, donde $(B_t^1)_{t\geq o}, \ldots, (B_t^d)_{t\geq 0}$ son Brownianos independientes.

A.4.1. Tiempos de salida

En esta sección presentamos algunos resultados relevantes para este trabajo sobre la distribución de los tiempos de salida del Movimiento Browniano. Un resultado de particular interés para este trabajo es la proposición A.27.

Fijemos en lo que sigue un Movimiento Browniano $(B_t)_{t\geq 0}$, definimos los tiempos de parada

$$\tau_r = \text{ínf}\{t \geq 0 : \; |B_t| = r\} \text{ para } r \geq 0, \tag{A.4.1}$$

$$T_a = \text{ínf}\{t \geq 0 : \; B_t = a\} \text{ para } a \in \mathbb{R} \tag{A.4.2}$$

Observación A.24. Notar que

1. $\tau_r = \text{mín}\{T_r, T_{-r}\}$.

2. $\{\text{máx}\{B_s : s \in [0,t]\} \geq r\} = \{T_r \leq t\}$

3. $\{\text{máx}\{|B_s| : s \in [0,t]\} \geq r\} = \{\tau_r \leq t\}$

Proposición A.25. Sea $(B_t)_{t\geq 0}$ un browniano estándar, si $r > 0$ tenemos

$$\mathbb{P}(T_r < t) = \mathbb{P}(\text{máx}\{B_s : s \in [0,t]\} \geq r) = 2\mathbb{P}(B_t \geq r). \tag{A.4.3}$$

Demostración. Ver teorema 2.21 [MP10]. □

Observación A.26. Resulta de esta proposición (ver observación 2.22 en [MP10]) que para $(B_t)_{t\geq 0}$ browniano estándar

$$\mathbb{P}(T_r \leq t) \leq \frac{\sqrt{2t}}{r\sqrt{\pi}} \exp(-\frac{r^2}{2t}). \tag{A.4.4}$$

Por la proposición A.18 resulta también

$$\mathbb{P}(T_{-r} \leq t) \leq \frac{\sqrt{2t}}{r\sqrt{\pi}} \exp(-\frac{r^2}{2t}). \tag{A.4.5}$$

Luego concluimos por la observación A.24 que

$$\mathbb{P}(\text{máx}\{|B_s| : s \in [0,t]\} \geq r) = \mathbb{P}(\tau_r \leq t) \leq \frac{2\sqrt{2t}}{r\sqrt{\pi}} \exp(-\frac{r^2}{2t}). \tag{A.4.6}$$

Proposición A.27. Sea $(B_t)_{t\geq 0}$ un browniano estándar, tenemos

$$\mathbb{P}(\max_{s\in[0,t]}\{|B_s - s|\} \geq r) \leq O(e^{-\lambda_t r}) \tag{A.4.7}$$

Demostración. Consideremos el proceso $(\widetilde{B_s})_{s\in[0,t]}$ dado por $\widetilde{B_s} = B_s - s$. Este no es un Movimiento Browniano en $(\Omega, \mathbb{P}, \mathcal{F})$ pero por el teorema de Girsanov (ver [Bor17] Teorema 10.1 capítulo 2) sí lo es en $(\Omega, \widetilde{\mathbb{P}}, \mathcal{F})$ donde $\widetilde{\mathbb{P}}$ está dada por

$$\frac{d\widetilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} = \exp(B_t - \frac{t}{2}).$$

Luego

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\max_{s\in[0,t]}\{|B_s - s|\} \geq r\right) = \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\mathbb{1}_{\{\text{máx}_{s\in[0,t]}\{|B_s - s|\}\geq r\}}\right) = \\
&= \mathbb{E}_{\widetilde{\mathbb{P}}}\left(\mathbb{1}_{\{\text{máx}_{s\in[0,t]}\{|B_s - s|\}\geq r\}} \exp\left(-B_t + \frac{1}{2}t\right)\right) = \\
&= \mathbb{E}_{\widetilde{\mathbb{P}}}\left(\mathbb{1}_{\{\text{máx}_{s\in[0,t]}\{|\widetilde{B_s}|\}\geq r\}} \exp(-\widetilde{B_t})\right) \exp\left(\frac{-t}{2}\right) \leq \\
&\leq \mathbb{E}_{\widetilde{\mathbb{P}}}\left(\mathbb{1}_{\{\text{máx}_{s\in[0,t]}\{|\widetilde{B_s}|\}\geq r\}}\right)^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}_{\widetilde{\mathbb{P}}}\left(\exp(-2\widetilde{B_t})\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{-t}{2}\right) \leq \\
&\leq \widetilde{\mathbb{P}}\left(\max_{s\in[0,t]}\{|\widetilde{B_s}|\} \geq r\right)^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}_{\widetilde{\mathbb{P}}}\left(\exp(-2\widetilde{B_t})\right)^{\frac{1}{2}} \exp(-\frac{t}{2}).
\end{aligned}$$

Tenemos entonces por (A.4.6) que

$$\widetilde{\mathbb{P}}\left(\max_{s\in[0,t]}\{|\widetilde{B_s}|\} \geq r\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{C_t}{\sqrt{r}}\exp(-\frac{r^2}{4t}).$$

Además, como bajo $\widetilde{\mathbb{P}}$ tenemos $\widetilde{B_t} \sim N(0,t)$ concluimos

$$\mathbb{E}_{\widetilde{\mathbb{P}}}\left(\exp(-2\widetilde{B_t})\right)^{\frac{1}{2}} = \exp(t).$$

Concluimos así

$$\mathbb{P}\left(\max_{s\in[0,t]}\{|B_s - s|\} \geq r\right) \leq \frac{C_t\exp(\frac{t}{2})}{\sqrt{r}}\exp(-\frac{r^2}{4t}).$$

$\square$

A.5. Procesos de Markov

Fijemos $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad y S un espacio polaco (métrico, completo y separable). En lo que sigue denotamos por

- $\mathcal{B}(S)$ σ-álgebra de borel de S.
- $B(S) = \{f : S \to \mathbb{R} :$ medible borel y acotada$\}$.
- La filtración natural asociada a un proceso estocástico $X = (X_t)_{t\geq 0}$ es $(F_t^X)_{t\geq 0}$ dada por $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_u : u \in [0,t])$.

Definición A.28. Decimos que un proceso estocástico $(X_t)_{t\geq 0}$ es un proceso de Markov respecto de una filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si

$$\mathbb{E}(f(X_{t+s}) \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(f(X_{t+s}) \mid X_t), \quad \forall t, s \geq 0, \; f \in B(S). \tag{A.5.1}$$

La propiedad (A.5.2) aplicada a funciones características resulta en

$$\mathbb{P}(X_{t+s} \in E \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{P}(X_{t+s} \in E \mid X_t), \quad \forall t, s \geq 0, \; E \in \mathcal{B}(S). \tag{A.5.2}$$

Esto se entiende comúnmente como: el estado del proceso a partir de tiempo t depende solamente del azar y del estado en tiempo t. En este sentido, para construir procesos de Markov es natural considerar un estado de partida o distribución inicial y luego establecer las transiciones del proceso.

Definición A.29. Una probabilidad de transición en S es $\pi : [0, +\infty] \times S \times \mathcal{B}(S) \to [0,1]$ tal que

1. $\pi(t, x, \cdot)$ es una medida de probabilidad en S.
2. $\pi(0, x, \cdot) = \delta_x$.

3. $\pi(\cdot, \cdot, E)$ es medible borel en $[0, +\infty] \times S$ y acotada.
4. $\pi(t+s, x, E) = \int_S \pi(s, y, E) d\pi(t, x, y)$.

Decimos que un proceso de Markov $(X_t)_{t\geq 0}$ respecto de una filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ tiene probabilidades de transición π si

$$\mathbb{E}(f(X_{t+s}) \mid \mathcal{F}_t) = \int_S f(y) d\pi(s, X_t, y), \quad \forall t, s \geq 0, \; f \in B(S). \tag{A.5.3}$$

Para funciones características resulta

$$\mathbb{P}(X_{t+s} \in E \mid \mathcal{F}_t) = \pi(s, X_t, E), \quad \forall t, s \geq 0, \; E \in \mathcal{B}(S). \tag{A.5.4}$$

Teorema A.30. Sea π una probabilidad de transición en S y ν probabilidad en S cualquiera. Existe entonces un proceso de Markov $(X_t)_{t\geq 0}$ con probabilidad de transición π y distribución inicial ν.

Demostración. Ver capítulo 4, Teorema 1.1 de [EK86]. Notar que asumimos que S es polaco. $\square$

A.5.1. Semigrupos

Notamos que $C_0(S) = \{f : S \to \mathbb{R} : \text{continua y tal que } \lim_{x\to\infty} f(x) = 0\}$ es un espacio de Banach con la norma del supremo

$$||f||_\infty = \sup\{|f(x)| : \; x \in S\}.$$

Definición A.31. Un C^0-semigrupo en $C_0(S)$ es una familia $(P_t)_{t\geq 0}$ de operadores acotados en $C_0(S)$ tal que

- $P_0 = \mathrm{Id}$
- $P_{t+s} = P_t P_s = P_s P_t$
- $||P_t f - f||_\infty \xrightarrow{t\to 0} 0$, para toda $f \in C_0(S)$.

Observación A.32. Una probabilidad de transición π define un semigrupo mediante

$$P_t f(x) = \int_S f(y) d\pi(t, x, y). \tag{A.5.5}$$

En este caso $||P_t|| \leq 1$ para todo $t \geq 0$. Un C^0-semigrupo con dicha propiedad se dice contractivo.

Nos interesa establecer bajo qué condiciones un C^0-semigrupo determina un proceso de Markov, a esto apuntamos en lo que sigue. Esto es de particular importancia para este trabajo pues es de esta manera que elegimos definir el Movimiento Browniano en $\mathbb{H}$ en el capítulo 5.

Definición A.33. Un semigrupo $(P_t)_{t\geq 0}$ en $B(S)$ se dice de Feller si se satisfacen:

1. $||P_t|| \leq 1$ (contractibilidad).
2. $f \geq 0 \implies P_t f \geq 0$ (positividad).
3. $P_t \mathbb{1} = \mathbb{1}$.
4. $(P_t)_{t\geq 0}$ es un C^0-semigrupo en $C_0(S)$.

Teorema A.34. Sea $(P_t)_{t\geq 0}$ un semigrupo de Feller en S tal que

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} P_t(\mathbb{1}_{B(x,\varepsilon)^c})(x) = 0, \quad \text{para todo } x \in S, \text{ y } \varepsilon > 0. \tag{A.5.6}$$

Entonces para toda ν probabilidad en S existe un proceso de Markov $(X_t)_{t\geq 0}$ tal que

1. $X_0 \sim \nu$
2. $\mathbb{E}(f(X_{t+s}) \mid \mathcal{F}_t^X) = P_s(f(X_t))$
3. $t \to X_t$ es continuo c.s.

Demostración. Ver capítulo 4, proposición 2.4 y 2.9 en [EK86] □

□

Observación A.35. Como consecuencia del teorema previo, una probabilidad ν en S y un semigrupo de Feller $(P_t)_{t\geq 0}$ determinan una medida en $C([0,+\infty), S)$, esta es la distribución del proceso $(X_t)_{t\geq 0}$ en dicho teorema.

Dado $E \subset C([0,+\infty), S)$ boreleano definimos

$$P_\nu(E) = \mathbb{P}((X_t)_{t\geq 0}\ inE), \text{ y}$$

$$\mathbb{E}_\nu(f) = \mathbb{E}(f((X_t)_{t\geq 0})),$$

donde $(X_t)_{t\geq 0}$ satisface $X_0 \sim \nu$. Cuando $\nu = \delta_x$ escribimos $\mathbb{P}_x = \mathbb{P}_{\delta_x}$ y $\mathbb{E}_x = \mathbb{E}_{\delta_x}$

A.5.2. Propiedad de Markov fuerte

Definición A.36. Decimos que un proceso $(X_t)_{t\geq 0}$ tiene la propiedad de Markov fuerte si para todo tiempo de parada τ respecto de la filtración $(F_t^X)_{t\geq 0}$ que es c.s. finito tenemos

$$\mathbb{E}(f(X_{t+\tau}) \mid \mathcal{F}_\tau^X) = P_t(f)(X_\tau) \text{ para todo } t \geq 0. \tag{A.5.7}$$

Teorema A.37. (Propiedad de Markov fuerte) Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ dado por el teorema A.34, se tiene que $(X_t)_{t\geq 0}$ tiene la propiedad de Markov fuerte.

Más aún dado τ tiempo de parada respecto de $(F_t^X)_{t\geq 0}$ que es c.s. finito

$$\mathbb{E}(f((X_t)_{t\geq 0}) \mid \mathcal{F}_\tau^X) = \mathbb{E}_{X_\tau}(f) \tag{A.5.8}$$

Demostración. Que tiene la propiedad de Markov fuerte es consecuencia del Teorema 2.7 en el capítulo 4 de [EK86]. Por una prueba de la fórmula A.5.8 ver [EK86] Proposición 1.5, capítulo 4.

□

Bibliografía

[Ahl79] Lars V. Ahlfors. Complex analysis. An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable. 3rd ed. International Series in pure and applied Mathematics. Düsseldorf etc.: McGraw-Hill Book Company. XIV, 331 p., 1979.

[BEK04] Michel Benaïm and Nicole El Karoui. *Promenade aléatoire. Chaînes de Markov et simulations, martingales et stratégies.* Palaiseau: Les Éditions de l'École Polytechnique, 2004.

[BHM11] Sébastien Blachère, Peter Haïssinsky, and Pierre Mathieu. Harmonic measures versus quasiconformal measures for hyperbolic groups. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 44(4):683–721, 2011.

[Bil68] P. Billingsley. Convergence of probability measures, 1968.

[BL85] Philippe Bougerol and Jean Lacroix. *Products of random matrices with applications to Schrödinger operators*, volume 8 of *Prog. Probab. Stat.* Birkhäuser, Boston, MA, 1985.

[BL96] Werner Ballmann and François Ledrappier. Discretization of positive harmonic functions on Riemannian manifolds and Martin boundary. In *Actes de la Table Ronde de Géométrie Différentielle (Luminy, 1992)*, volume 1 of *Sémin. Congr.*, pages 77–92. Soc. Math. France, Paris, 1996.

[Bon09] Francis Bonahon. *Low-dimensional geometry. From Euclidean surfaces to hyperbolic knots*, volume 49 of *Stud. Math. Libr.* Providence, RI: American Mathematical Society (AMS); Princeton, NJ: Institute for Advanced Study, 2009.

[Bor17] Andrei N. Borodin. *Stochastic processes. Translated from the Russian.* Probab. Appl. Cham: Birkhäuser/Springer, original Russian edition published by LAN Publishing, St. Petersburg 2013 edition, 2017.

[BP21] Werner Ballmann and Panagiotis Polymerakis. Equivariant discretizations of diffusions, random walks, and harmonic functions. *Enseign. Math.*, 67(3-4):331–367, 2021.

[Bus92] Peter Buser. *Geometry and spectra of compact Riemann surfaces*, volume 106 of *Prog. Math.* Boston, MA: Birkhäuser, 1992.

[Cha84] Isaac Chavel. Eigenvalues in Riemannian geometry. Pure and Applied Mathematics, 115. Orlando etc.: Academic Press, Inc. XIV, (1984)., 1984.

[CLP21] Matías Carrasco, Pablo Lessa, and Elliot Paquette. On the speed of distance-stationary sequences. *ALEA, Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, 18(1):829–854, 2021.

[CM07a] Chris Connell and Roman Muchnik. Harmonicity of Gibbs measures. *Duke Math. J.*, 137(3):461–509, 2007.

[CM07b] Chris Connell and Roman Muchnik. Harmonicity of quasiconformal measures and Poisson boundaries of hyperbolic spaces. *Geom. Funct. Anal.*, 17(3):707–769, 2007.

[Dal07] Françoise Dal'Bo. *Trajectoires géodésiques et horocycliques.* Savoirs Actuels. EDP Sciences - CNRS Editions, 2007.

[DM88] E. B. Davies and N. Mandouvalos. Heat kernel bounds on hyperbolic space and Kleinian groups. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 57(1):182–208, 1988.

[EK86] Stewart N. Ethier and Thomas G. Kurtz. *Markov processes. Characterization and convergence.* Wiley Ser. Probab. Math. Stat. John Wiley & Sons, Hoboken, NJ, 1986.

[FLJ12] Jacques Franchi and Yves Le Jan. *Hyperbolic dynamics and Brownian motion.* Oxford Mathematical Monographs. Oxford University Press, Oxford, 2012. An introduction.

[Fur71] Harry Furstenberg. Random walks and discrete subgroups of Lie groups. In *Advances in Probability and Related Topics, Vol. 1*, pages 1–63. Dekker, New York, 1971.

[Gar22] E. García. Pérdida de dimensión para caminatas al azar en grupos de schottky. *PEDECIBA-UDELAR*, 2022.

[GL20] E. Garcia and P. Lessa. On the discreteness of states accessible via right-angled paths in hyperbolic space. *Enseign. Math. (2)*, 66(3-4):383–407, 2020.

[GL23] E. García and P. Lessa. Dimension drop of harmonic measure for some finite range random walks on fuchsian schottky groups. https://arxiv.org/abs/2301.09714, 2023.

[Gui80] Yves Guivarc'h. Sur la loi des grands nombres et le rayon spectral d'une marche aléatoire. Astérisque 74, 47-98 (1980)., 1980.

[Hsu02] Elton P. Hsu. *Stochastic analysis on manifolds*, volume 38 of *Graduate Studies in Mathematics.* American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

[Kai92] Vadim A. Kaimanovich. Discretization of bounded harmonic functions on Riemannian manifolds and entropy. In *Potential theory (Nagoya, 1990)*, pages 213–223. de Gruyter, Berlin, 1992.

[Kat92] Svetlana Katok. *Fuchsian groups.* Chicago: The University of Chicago Press, 1992.

[KLP11] Vadim A. Kaimanovich and Vincent Le Prince. Matrix random products with singular harmonic measure. *Geom. Dedicata*, 150:257–279, 2011.

[Kos21] Petr Kosenko. Fundamental inequality for hyperbolic Coxeter and Fuchsian groups equipped with geometric distances. *Int. Math. Res. Not.*, 2021(6):4709–4728, 2021.

[Kra04] Steven G. Krantz. *Complex Analysis: The Geometric Viewpoint.* Carus Mathematical Monographs 23. The Mathematcal Association of America, 2 edition, 2004.

[Li18] Jialun Li. Decrease of Fourier coefficients of stationary measures. *Math. Ann.*, 372(3-4):1189–1238, 2018.

[LNP21] Jialun Li, Frédéric Naud, and Wenyu Pan. Kleinian Schottky groups, Patterson-Sullivan measures, and Fourier decay. *Duke Math. J.*, 170(4):775–825, 2021. With an appendix by Li.

[LS84] Terry Lyons and Dennis Sullivan. Function theory, random paths and covering spaces. *J. Differential Geom.*, 19(2):299–323, 1984.

[Mas71] Bernard Maskit. On Poincaré's theorem for fundamental polygons. *Adv. Math.*, 7:219–230, 1971.

[MP10] Peter Mörters and Yuval Peres. *Brownian motion*, volume 30 of *Camb. Ser. Stat. Probab. Math.* Cambridge: Cambridge University Press, 2010.

[Pra71] Jean-Jacques Prat. Étude asymptotique du mouvement brownien sur une variété riemannienne à courbure négative. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 272:A1586–A1589, 1971.

[Pra75] Jean-Jacques Prat. Étude asymptotique et convergence angulaire du mouvement brownien sur une variété à courbure négative. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 280(22):Aiii, A1539–A1542, 1975.

[Sul79] Dennis Sullivan. The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (50):171–202, 1979.

[Sul87] Dennis Sullivan. Related aspects of positivity in Riemannian geometry. *J. Differential Geom.*, 25(3):327–351, 1987.

[Tho16] James Thompson. Brownian motion and the distance to a submanifold. *Potential Anal.*, 45(3):485–508, 2016.

[Var01] S. R. S. Varadhan. *Probability theory*, volume 7 of *Courant Lect. Notes Math.* Providence, RI: AMS, American Mathematical Society; New York, NY: New York Univ., Courant Institute of Mathematical Sciences, 2001.

[Wil91] David Williams. *Probability with martingales.* Cambridge etc.: Cambridge University Press, 1991.